RB 8-844

Presented to the

LIBRARY *of the*

UNIVERSITY OF TORONTO

by

Professor

Ralph G. Stanton

200.

METHODO INVERSO

DOS LIMITES,

OU

DESENVOLVIMENTO GERAL

DAS FUNÇÕES ALGORITHMICAS

POR

FRANCISCO DE BORJA GARÇÃO STOCKLER,
Barão da Villa da Praia, do Concelho de SUA MAGESTADE FIDELISSIMA, Tenente General efectivo dos Seus Exercitos, Commendador da Ordem de Christo, Socio da Sociedade Real de Londres, e da Sociedade Philosophica de Philadelphia, &c.

LISBOA:

NA TYPOGRAFIA DE SIMÃO THADDEO FERREIRA.

M.DCCCXXIV.

Digitized by the Internet Archive
in 2012 with funding from
University of Toronto

http://archive.org/details/methodoinversodo00stoc

PREFAÇÃO.

AS Obras Scientificas, dignas de apreço pelo seu merecimento intrinseco, não carecem de Prologos ou Discursos preliminares que as abonem; e aquellas que nenhuma novidade encerram nem na doutrina, nem na fórma da sua expozição, por mais eloquentes e elegantemente escriptos que sejam os preambulos que lhes anteponham, nem por isso hão de ser jamais contadas na Classe das producções originaes: nem mesmo hão de deixar de cahir, com mais ou menos brevidade, no esquecimento a que a sua propria insignificancia e trivialidade as condemna. Semelhantes Introducções, não servindo por tanto para darem consistencia e crédito ás compozições a que se ajuntam, raramente produzem outro efeito que não seja enfastiar os Leitores instruidos, ou habilitar os Semisabios para ostentarem na prezença de outros ignorantes enfronhados em literatura da sua laia huma afectada erudição, reproduzindo em seus discursos meras reminiscencias verbaes, como actos de memoria precedidos de reflexão e inteligencia.

Não devemos com tudo dissimular, que occorrem algumas vezes circunstancias notaveis, as quaes cooperando para accelerar ou retardar a publicação de Obras dignas da luz pública, merecem ser transmitidas á posteridade como factos importantes na historia do espirito humano, ja pela sua influencia no progresso das Sciencias, ja pelo impulso que deram ou pelo atrazamento que occazionáram á instrucção geral, ou em particular á da Nação em cuja lingoagem as mesmas Obras foram escriptas: e não ha por certo logar mais proprio para fazer-se commemoração de taes acontecimentos, do que são os prologos ou prefações das Obras, a que elles dizem especialmente respeito. Estes discursos preliminares ficam assim constituindo uma especie de Registo ou Archivo de factos, que merecem ter logar no corpo da historia das Sciencias; ao mesmo tempo que acautelam por uma parte, que Escriptores, mais ambiciosos de nome do que merecedores de o terem, se arroguem a gloria que a outros só pertence; e impedem por outra, que esta seja roubada, por efeito de mizeraveis emulações e baixas intrigas, a aquelles a quem de justiça compete.

Fundado na primeira d'estas considerações foi, que eu antepuz um breve discurso preliminar ao meu compendio da Theorica dos Limites, ou Elementos do seu Methodo directo, que publiquei em o anno de 1794:

e he fundado na segunda, que hoje anteponho esta singela Prefação ao Methodo Inverso, cuja publicação imperiosos motivos e imprevistas distracções me obrigáram a retardar, forçando-me a interromper durante muitos annos o desenvolvimento das ideas, que a minha precedente aplicação ao estudo das Sciencias Mathematicas havia excitado no meu limitado espirito.

No additamento á primeira Secção d'este breve Tratado refiro quanto basta para instruir o público de qual foi o tempo, em que pela primeira vez me occorêram os principios fundamentaes, que servíram de baze ao meu discurso sobre este dificil assumpto, e quaes os obstaculos que por tantos annos me impedíram de mais cogitar de semelhante objecto: até que finalmente no anno de 1819, quando na qualidade de Membro e Prezidente interino da Junta da direcção da Academia militar do Rio de Janeiro me via precizado a voltar segunda vez a minha atenção para as Sciencias, que em outro tempo professára, aconteceu que chegassem á minha mão a Philosophia das Mathematicas de M. Wronski; a sua Refutação da Theoria das Funções analyticas de M. de Lagrange, e os primeiros oito tomos dos Annaes das Mathematicas puras e aplicadas, publicados por M. Gergone. A leitura d'estas Obras, á qual com grande avidez me abalancei, excitando em mim a recordação de minhas antigas ideas, me determinou a procurar entre os meus papeis os apontamentos aonde as havia consignado; e a dar-lhes o mais amplo desenvolvimento que as circunstancias do tempo, e a minha fraca saúde, ja então gravissimamente deteriorada, me permetissem.

O desejo de dar hum authentico testemunho do meu reconhecimento á Sociedade Real de Londres, a qual por aquelle mesmo tempo me fizera a honra de admitirme em o numero dos seus Socios Estrangeiros, foi um novo excitamento que me impelio a procurar eficazmemte levar ao cabo este trabalho, para d'elle fazer-lhe a reverente oferta, que depois efectivamente lhe fiz. Quando porém eu estava com a terceira Secção ja entre mãos, e não pouco adiantada, aconteceu que Sua Magestade O Senhor REI Dom JOÃO Sexto se lembrasse de mim para encarregar-me de projectar o plano mais adequado, n'aquellas circunstancias, para a defeza da Capital do Reino do Brazil, do seu porto, e da Costa que decorre d'este para o Sul até a Mangaritiba, contra o ataque, que então se receava da parte de uma Nação poderosa.

Esta importantissima commissão, a que não era decente recuzar-me, a pezar do estado decadente da minha saúde, e do fatal pronostico dos

Professores que me assistiam, os quaes justamente receavam, que o termo da minha vida estivesse mui proximo, me obrigou a rematar apressadamente a empreza literaria, em que me achava empenhado: e d'esta precipitação rezultou que ella não fosse levada á extensão, que eu projectava dar-lhe; e que não adquirisse o gráo de perfeição, que com mais meditação e vagar talvez lhe haveria dado. O que porém he sem dúvida, e o que a justiça pede que eu declare, he que este Tratado ou não apareceria no Público, ou apareceria muito mais imperfeito, se a bondade do R.mo Sñr. Fr. Pedro de Santa Mariana Professor de Mathematica na Academia militar do Rio de Janeiro, e o dezejo que elle constantemente mostrou de comprazer-me, o não determinassem a tomar sobre si o enfadonho trabalho de copiar em limpo os meus borrões, e de refazer por inteiro os extensos, dificeis, e complicados calculos, de que dependem as muitas, e em grande parte novissimas formulas, em que consiste a solução dos Problemas, ou a expressão dos Theoremas, que no mesmo Tratado se contem. A verificação da sua exactidão fazia indespensavel este trabalho, que então me não era possivel empreehender; que mesmo convinha que fosse feito por outra mão; e que não poderia ser efeituado senão por hum calculador tão habil como o sobredito Professor.

Esperava eu com tudo que terminada a Commissão, de que o Governo me havia encarregado (a qual tive a fortuna de concluir em mui breve tempo medeante a cooperação do meu digno Camarada o Ex.mo Sñr. Tenente General Manoel Martins do Couto Reis, que fôra nomeado para coadjuvarme) me fosse possivel acrescentar ainda huma quarta Secção ao meu Tratado do Methodo Inverso dos Limites; ou pelo menos alguns problemas, em fórma de Additamento ou Notas, por cujo meio confirmasse ainda mais a grandissima utilidade do referido Methodo nas Sciencias exactas: porém tendosse agravado consideravelmente a minha molestia, e nomeando-me Sua Magestade para Governador e Capitão General das Ilhas dos Açores, foi forçoso que eu partisse para o meu destino sem verificar este pensamento.

Foi no dia 16 de Junho de 1820, que eu, quazi moribundo, embarquei no Rio de Janeiro com direcção a Lisboa; aonde cheguei no dia 28 de Agosto seguinte, precizamente quando nesta Cidade se divulgava a noticia da desgraçada insurreição do Porto, acontecida ali no dia 24; origem fatal das maiores desgraças que a Monarchia Portugueza jamais havia experimentado, e cujos funestos efeitos terá que sentir ainda por largos annos. A consideração de tão melindrosa situação politica: o conhecimento

do meu proprio caracter, e o sentimento do meu estado fizico, tudo concorria a mostrarme, que eu devia contemplar a minha sorte e a minha vida não só incertas, mas por extremo arriscadas: e como eu não quizesse aventurar o meu manuscripto a perecer juntamente comigo, me determinei a confia-lo ao meu douto amigo e companheiro de viajem o Ill.mo Sñr. José Maria Dantas Pereira Chefe de Esquadra da Real Marinha, e Geometra assás conhecido, cujos não vulgares talentos e multiplicadas producções scientificas tanto honram a nossa Patria, pedindo-lhe que em meu nome quizesse aprezenta-lo á Academia Real das Sciencias de Lisboa, da qual eu ainda então era Socio; e rogando-lhe, que no cazo d'esta illustre Corporação julgar o meu trabalho digno da sua aprovação, quizesse elle encarregarse de dirigir a impressão, e de corrigir não só as provas d'esta, mas o proprio original, aonde este carecesse de emenda, ou admitisse melhoramento.

Prestousse o meu digno amigo a esta súplica; porém o conceito da Academia não correspondeu á nossa expectação. Os Censores por ella nomeados não só julgáram a minha Obra pouco digna de sahir á luz pública, mas até mostráram recear que da sua publicação rezultasse dezar ás Sociedades Estrangeiras, a que tenho a honra de pertencer. Tão imperfeita, ou tão defeituosa a consideráram !!

Não me parecendo possivel, que o seu ardente zelo pela reputação de Corporações Literarias, a que não pertenciam, deixasse de abranger a propria Academia de que erão membros; e observando por outra parte que esta, apezar do conhecimento que de mim tinha pelos serviços de mais de trinta annos, prestados nos cargos Academicos de maior consideração, annuira sem dificuldade ao parecer de seus novos, e talvez ainda não bem experimentados Socios; persuadi-me que a razão e a decencia exigiam de mim, que eu procurasse poupa-la ao descredito, que poderia provir-lhe de continuar a ler-se o meu nome na Lista de seus tão respeitaveis e dignos membros: e com este intento, querendo aliás dar-lhe a ultima prova do meu respeito e consideração, me despedi da sua associação por carta dirigida ao seu benemerito Secretario, que então era, o Concelheiro José Correa da Serra.

Reflectindo porém que os meus Sabios Censores não eram ainda n'aquelle tempo conhecidos no público por Obras scientificas de importancia suficiente para habilitar este a fórmar justo conceito da extensão dos seus conhecimentos e capacidade: (*) assentei que para não deixar a opinião

(*) Tenho razões de prezumir que os meus Censores foram os Senhores Francisco Villela

dos Sabios vacilante entre a minha reputação e a dos meus Censores convinha que eu fizesse pública por meio da imprensa a obra que elles haviam reprovado, e que analyzando as razões em que para isso se fundaram as patenteasse igualmente ao público.

Quanto á Obra ella he, sem alteração essencial, ou acrescentamento algum, a que se comprehende neste pequeno volume. A sua leitura dará aos homens entendidos as precizas nossões para avaliarem o seu merito,

---

Barboza, e João Evangelista Torriani. Julgo conveniente notar aqui que o primeiro ainda agora não he conhecido entre os Geômetras senão como Escriptor de uns Elementos de Geometria de merecimento menos que mediocre; os quaes com tudo tem sido duas vezes impressos á custa da Academia, com a sua aprovação, e debaixo do seu privilegio. O segundo era hum Mosso de talento, que prometia grandes esperanças; mas que terminou a vida na flor da mocidade. As Obras que me consta ter deixado escriptas reduzem-se a uma Memoria coroada pela Academia com a qual elle concorrêra ao Programa proposto para o anno de 1813, em que a dita Sociedade pedia a demonstração das Formulas publicadas por M. Wronski para a rezolução geral das Equações algebricas de qualquer gráo: e a outra, cujo objecto he a deducção de uma formula geral, que exprimindo a relação entre os coeficientes de qualquer equação e as somas das potencias das suas raizes servisse de demonstrar, sem ser por inducção, o Theorema, que Newton publicára sobre este objecto, sem demonstra-lo, ou indicar o modo por que viera no conhecimento da verdade d'elle. O Autor mostrando-se pouco satisfeito das demonstrações que M. de Lagrange, e Eu, haviamos dado do mesmo Theorema, se lizongea de haver sido o primeiro Geometra que conseguio demonstrar sem dependencia de genero algum de inducção a formula geral, que exprime a referida relação. Sem negar-lhe o devido louvor cumpre-me observar que este mosso Geometra ou não tinha lido; ou simulou não ter lido, a segunda das duas demonstrações, que Euler havia dado do mencionado Theorema no segundo Tomo dos seus Opusculos. Se elle tivesse conhecimento d'esta Demonstração ter-se-hia poupado ao trabalho que tomou: e teria reconhecido, que sem necessidade de recorrer a uma origem tão remota, e impropria de demonstrar propozições de Algebra elementar, quaes são os principios do Cálculo diferencial, ou Theoria das funções derivadas, o seu Theorema geral se deduz immediatamente da equação geral $x^m - q_{m-1}\, x^{m-1} + q_{m-2}\, x^{m-2} - q_{m-3}\, x^{m-3} + \cdots \pm q = 0$;

escrevendo successivamente em logar de x os seus valores α; β; γ; δ; &c. e somando todas as equações assim formadas, cuja soma lhe daria

$$\int\alpha^m - q_{m-1} \int\alpha^{m-1} + q_{m-2} \int\alpha^{m-2} - q_{m-3} \int\alpha^{m-3} + \cdots \pm n\,q = 0$$

ou representando $\int\alpha^m$ por A_m; $\int\alpha^{m-1}$ por A_{m-1}; $\int\alpha^{m-2}$ por A_{m-2} &c.

$$A_m - q_{m-1}\, A_{m-1} + q_{m-2}\, A_{m-2} - q_{m-3}\, A_{m-3} + \cdots \pm n\,q = 0$$

por me servir dos mesmos simbolos do Autor. Se estes forão com efeito os Censores, que reprováram a minha Obra, ignoro que tivessem outros titulos que lhe dessem direito á confiança da Academia.

exactidão, e importancia: quanto porém ás razões em que os Censores se fundáram para contempla-la como um monumento de descredito para as Sociedades, de que sou membro, ellas se reduzem a duas, se por ventura os circunspectos Censores Academicos não tiveram outras, que por modestia caláram.

A primeira consistio em dizerem, que a minha Theoria do Methodo Inverso dos Limites dependendo essencialmente do Theorema primeiro da primeira Secção do meu Compendio da Theoria dos Limites, ou Elementos do seu Methodo directo, não era admissivel por isso que a demonstração, por mim ali produzida, de que a soma de qualquer número de quantidades variaveis, cada uma das quaes não tem Limite em diminuição, tambem não tem limite em diminuição, não abrange o caso, em que o *número* das ditas quantidades he sem limite em augmento, ou em fraze mais commum *infinito*.

Confesso ingenuamente, que não comprehendo o que os meus Sabios Censores entendem por *número* sem limite em augmento, ou *infinito*. No meu conceito os números são sim infinitos; mas não ha número algum que seja infinito. A palavra *infinito*, ou a fraze equivalente *sem limite em augmento*, nas Sciencias Mathematicas (ao menos segundo o curto alcance da minha comprehensão, e o sentido em que eu uzo d'ella nos meus escriptos) quer dizer o mesmo que sem fim, sem termo, ou sem limite: ellas são por tanto vozes, que não reprezentando couza alguma positiva exprimem simplesmente a negação de fim, termo, ou limite, em que alguma quantidade, considerada como variavel, ou alguma Serie de quantidades entre si ligadas por uma Ley constante acabe ou possa acabar. Estas vozes quando eu d'ellas uzo exprimem um simples conceito do meu entendimento; e não a realidade, ou a actualidade de alguma couza existente fóra d'elle. Eu chamo, por exemplo infinita a Serie dos números naturaes, ou outra qualquer Serie, cujos termos na sua formação sejam sujeitos a uma Ley constante, da qual rezulte a possibilidade de acrescentar tantos termos quantos se quizer aos que ja se tiverem uma vez assignado, ou se contemplarem como assignados; e nisto só quero dizer, que taes Series se podem continuar illimitadamente. Ora cada um dos seus termos he uma quantidade, ou uma expressão algebrica precisamente determinada pela Ley da sua formação; e por isso nenhum d'elles póde chamar-se infinito: ou dizer-se sem limite em augmento: a totalidade porém dos seus termos se diz infinita, ou sem limite em augmento: por isso que ella não póde ser exprimida por termo algum da Serie dos números naturaes, por quão grande elle seja.

He evidente que quando nós escrevemos esta Serie

$$1; 2; 3; 4; 5; - - - - - n$$

á medida que vamos acrescentando novos termos aos ja escriptos cresce o numero d'estes; e como a possibilidade de acrescentar-lhe outros de novo preziste sempre, para exprimirmos esta possibilidade, ou para indicarmos, que o termo geral n póde reprezentar qualquer numero inteiro imaginavel, dizemos que a *Serie*, ou *o numero dos seus termos, he infinita, ou sem limite em augmento.* Esta expressão he por tanto relativa a uma simples possibilidade que tem o simbolo n, considerado como variavel, de admitir valores cada vez maiores; e não diz de nenhuma sorte respeito a um só dos seus estados de grandeza em particular. Donde rezulta que na Serie dos numeros naturaes, se não comprehende numero algum que não seja finito, e perfeitamente determinado: ou, o que he o mesmo, que he impossivel ao entendimento humano conceber numero algum actualmente infinito, ou actualmente illimitado. Ora a minha demonstação he rigorosa, até pela confissão dos meus proprios Censores, para todos os casos em que o numero das quantidades variaveis he finito ou limitado: logo ella comprehende todos os casos imaginaveis, e não excluindo um só he evidentemente da maxima generalidade possivel.

Quanto á segunda razão, em que se fundou o parecer dos meus Censores, antes de responder-lhe ou analyza-la, cumpre que eu note, que uma mesma quantidade, ou uma mesma função algorithmica póde ser o limite de grandeza, ou o limite de expressão da soma dos termos de muitas diferentes Series. Ninguem que possua os principios elementares da Algebra ignora, que he por exemplo 2 o limite da soma dos termos das seguintes Series

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \&c.$$

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \frac{2}{81} + \frac{2}{243} + \&c.$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{1024} + \&c.$$

e de muitas outras: [illegible]to, quando se trata de achar o limite da soma dos termos de alg[illegible]as, tanto importa que nos sirvamos d'essa tal Serie, como de qualquer [illegible]outras; pois que todas ellas são equivalentes para este fim.

Mas tendo eu demonstrado na [illegible]ha Theorica dos Limites, que o limite de qualquer função variavel he igual á função homologa do limite

da sua raiz, e sendo $F(x, u)$ uma função qualquer de duas variaveis x, e u; das quaes u não tenha limite em diminuição, e x seja considerada como reprezentando o estado primitivo da propria variavel expressada por x, he evidente que será $Fx = \text{Lim. } F(x, u)$: porém $F(x+u)$ he tambem função de x, e u; e nada obsta a que se possa reprezentar debaixo da fórma mais generica $F(x, u)$; donde se conclue que he tambem $Fx = \text{Lim. } F(x+u)$. Logo quando se trata de achar a expressão de Fx, ou o limite commum a todas as funções de duas variaveis designadas pela fórma algorithmica funcional F; $F(x+u)$ he equivalente a qualquer das outras funções reprezentadas por $F(x, u)$.

Fundado nesta consideração, e querendo dar a toda a Serie das formulas do §. 1.º transcriptas na pagina 4.ª a mesma fórma, tinha eu escripto

$$F(x+u) = Fx + V F'(x+u)$$

em vez de

$$F(x+u) = Fx + V F'(x, u)$$

atendendo a que da equivalencia de $F(x+u)$, e $F'(x, u)$ para a determinação do seu limite se não seguia erro algum, ou inexactidão na solução do meu Problema Geral, e a que por este modo, dando uniformidade ás expressões indicativas da decompozição de $F(x+u)$; $F'(x+u)$; $F''(x+u)$; &c., facilitava conhecer-se ao primeiro golpe de vista o rezultado final das suas successivas substituições, em o qual consiste a solução do referido Problema. Com tudo os meus Censores, talvez sem advertirem na equivalencia, que neste cazo ha em escrever $F'(x+u)$; $F''(x+u)$; &c. em logar de $F'(x, u)$; $F''(x, u)$; &c., arguíram a minha Theoria de imperfeita, ou de absolutamente falsa; asseverando que a função que multiplicada por V deve addicionar-se a Fx para se ter a rigorosa expressão de $F(x+u)$ não póde ser uma função simetrica, qual he a que reprezenta a fórma $F'(x+u)$. Pareceu-me á vista das suas Censuras, que elles não faziam a devida distinção entre expressões ou equações de pura identidade ou rigorosa igualdade, e expressões, ou equações de simples equivalencia; mas por evitar discussões, que as mais das vezes com homens de letras infatuados da idea de um profundo saber, e não dizer possuidos de uma ridicula vaidade, degenera em animozidade, prestei-me, e até preferi, escrever $F'(x, u)$; $F''(x, u)$ &c. ao que antes havia escrito $F'(x+u)$; $F''(x+u)$; &c. Porém não bastou esta minha condescendencia para que elles deixassem de presistir na primitiva opinião, ou vontade; nem para

que a Academia deixasse de concordar com elles, sem talvez ouvir em Congregação a Classe respectiva. Ignoro o que mais se passou na Academia. O que posso asseverar com segurança, he que o meu manuscripto me foi restituido depois de muitos mezes, á força de instancias minhas, como não merecedor de sahir á luz pública com aprovação da Sociedade, não obstante que esta ja em o anno de 1794 houvesse aprovado o Theorema 1.º da 1.ª Secção da minha Theoriça dos Limites, cuja verdade os Censores punham em dúvida, e que era ja então o unico motivo que ficava existindo para sustentar o escandalo de tão sabios e eruditos Mathematicos.

Eis-aqui a veridica expozição de tudo quanto se passou a este respeito. O público decidirá se o juizo da Academia foi justo ou injusto; severo ou benigno; e se a sua aquiescencia á opinião dos Censores foi coherente com as Leis Academicas, e conforme aos principios da prudencia. Eu da minha parte nenhuma ulterior reflexão aventuro a este respeito, em contemplação ao credito de uma Sociedade que tanto tem contribuido para a divulgação dos conhecimentos scientificos em Portugal, e á qual eu tive a honra de pertencer. Não posso porém dispençar-me de declarar em obzequio da verdade, e em testemunho do meu reconhecimento, que o Ill.mo Sñr. José Maria Dantas Pereira não só não annuio ao parecer dos meus Censores; mas levou a sua contemplação e benevolencia para comigo, até ao ponto de encarregar-se do enfadonho e inglorioso trabalho de dirigir a impressão de uma Obra, a qual exigia o mais assiduo desvelo, e escrupulosa atenção para que nella não abundassem os erros do Cálculo. O meu regresso para as Ilhas dos Açores me impossibilitou de ser eu mesmo o corrector da impressão do meu Tratado: mas n'isto exige a justiça, que eu confesse que a minha Obra ganhou muito; pois que sem a assistencia do meu respeitavel amigo, os erros que me teriam escapado seriam sem dúvida em muito maior numero, e talvez mais consideraveis. Os mais atendiveis, dos que efectivamente escapáram, vão notados na Tabella, que foi preciso ajuntar no fim para indicar as correspondentes emendas: os menos significantes poderão facilmente ser reconhecidos, e corrigidos pelos Leitores. E se acerca d'est negocio se cometêrão outros erros corrijasse d'elles quem os cometeu.

METHODO INVERSO
DOS LIMITES,
OU
DESENVOLVIMENTO DAS FUNÇÕES EM SERIES.

SECÇÃO I.

Sobre o desenvolvimento das Funções consideradas na suas fórmas mais simples.

§. 1.º

O Desenvolvimento das Funções em Series constitue rigorosamente falando o Methodo inverso dos Limites, em quanto aplicado a Algorithmia geral, ou representação das quantidades por simbolos que as designem, e por signaes indicativos das operações, que sobre ellas devem praticar-se. E' com effeito consistindo o Methodo directo em determinar a expressão do limite de qualquer Função ou Serie dada, o objecto do Methodo inverso não póde ser outro senão determinar a lei, ou a fórma commum a todas as Series das quaes huma Função dada póde ser limite de expressão. Elle se reduz por tanto á solução deste unico

PROBLEMA.

Sendo x huma Função qualquer de qualquer número de variaveis, e representando por Fx huma Função qualquer de x, e por consequencia das mesmas variaveis que entrão na expressão de x, determinar a fórma ou lei geral commum a todas as Series de que Fx póde ser limite de expressão.

SOLUÇÃO.

Escolhido hum estado qualquer de grandeza de x para servir de termo ao qual se reportem todos os outros, designaremos este pelo nome de *Estado primitivo*, e todos os mais pela denominação de *Estados variados.*

Representando pois x o estado primitivo da quantidade ou Função indicada por x, e designando $x+u$ hum qualquer dos seus estados variados; Fx representará o estado primitivo da Função de x indicada por F, ou o estado de grandeza de Fx correspondente ao estado primitivo da Função representada por x, e $F(x+u)$ representará o estado de grandeza de Fx correspondente a $x+u$. Como o incremento u he absolutamente arbitrario, nos o podemos considerar capaz de admitir estados de grandeza menores do que qualquer outro que se tenha assignado; e por tanto he u huma variavel sem limite em diminuição : donde se segue que he $x = \lim.\ (x+u)$; e $Fx = \lim. F(x+u)$. D'aqui se conclue que $F(x+u)$ deve ser equivalente a Fx mais ou menos huma Função de x, e u, ou sómente de u sem limite em diminuição; e por consequencia considerada a fórma mais generica de $F(x+u)$ depois de separada nestas duas partes será

$$F(x+u) = Fx + V\,F'(x,u)$$

sendo V huma Função qualquer de u, a qual não tenha limite em diminuição, e $F'(x,u)$ huma Função de x e u capaz de limite Pela mesma razão, tendo sempre em vista a fórma mais geral das Funções de x e u, deverá ser

$$F'(x,u) = F'x + V'\,F''(x,u)$$
$$F''(x,u) = F''x + V''F'''(x,u)$$
$$F'''(x,u) = F'''x + V'''F^{IV}(x,u)$$
$$\&c.$$

Sendo V'; V''; V'''; &c. Funções de u sem limite em diminuição, e $F'(x,u)$; $F''(x,u)$; $F^{IV}(x,u)$; &c. Funções de x e u capazes de limite; porém a primeira d'estas condições não póde exprimir-se de hum modo mais geral do que supondo

$$V = u\varphi\ u$$
$$V' = u\varphi' u$$
$$V'' = u\varphi'' u$$
$$\&c.$$

expressões nas quaes φu; $\varphi' u$; $\varphi'' u$; &c. representão Funções de u capazes de limite, ou quantidades constantes. A substituição d'estes valores de V; V', V''; &c. nas equações antecedentes as reduz a

$$F(x+u) = F\ x + u\varphi\ u.\ F'(x,u)$$
$$F'(x,u) = F'\ x + u\varphi' u.\ F''(x,u)$$
$$F''(x,u) = F''\ x + u\varphi'' u.\ F'''(x,u)$$
$$F'''(x,u) = F'''x + u\varphi''' u.\ F^{IV}(x,u)$$
$$\&c.$$

e a substituição d'estas humas nas outras dá finalmente

$$F(x+u) = Fx + u\varphi\ u.\ F'x + u^2.\ \varphi u.\ \varphi' u.\ F''x + u^3.\ \varphi u.\ \varphi' u.\ \varphi'' u\ F'''x + \&c.$$

ou tambem escrevendo x em lugar de u, e u em lugar de x, o que de nenhuma sorte altera a fórma da Função $F(x+u)$;

$$F(x+u) = Fu + x.\varphi x F'u + x^2.\varphi x.\varphi' x F''u + x^3.\varphi x.\varphi' x.\varphi'' x F'''u + \&c.$$

Atendendo a que u não tem limite em diminuição, e designando por $F.$; $F.'$; $F.''$; &c. os limites de Fu; $F'u$; $F''u$; &c., ou os valores a que estas Funções se reduzem pela substituição de cifra em logar do simbolo representativo da sua raiz, se deduz finalmente d'esta formula a seguinte equação,

$$Fx = F. + x.\varphi x F.' + x^2.\varphi x.\varphi' x F.'' + x^3.\varphi x.\varphi' x.\varphi'' x.F.''' + \&c.$$

ou expressão generalissima, em que consiste a solução do Problema proposto.

§. 2.º

Tudo nesta formula se representa por ora indeterminado, menos a successão dos expoentes de x, e o valor de $F.$, o qual sabemos ser o limite da Função proposta Fx, supondo x sem limite em diminuição Para diminuir porém de algum modo esta indeterminação convem notar que da Serie de equações ultimamente indicadas em o §. antecedente se deduz a seguinte,

$$F'(x,u) = \frac{F(x+u) - Fx}{u.\varphi u}$$

$$F''(x,u) = \frac{F'(x,u) - F'x}{u.\varphi' u}$$

$$F'''(x,u) = \frac{F''(x,u) - F''x}{u\varphi'' u}$$

$$F^{IV}(x,u) = \frac{F'''(x,u) - F'''x}{u\varphi''' u}$$

&c.

e que d'estas pela aplicação do Methodo directo dos limites se conclue

$$F'x = \lim.\left(\frac{F(x+u) - Fx}{u\varphi u}\right)$$

$$F''x = \lim\left(\frac{F'(x,u) - F'x}{u\varphi' u}\right)$$

$$F'''x = \lim.\left(\frac{F''(x,u) - F''x}{u\varphi'' u}\right)$$

&c.

o que nos mostra, que todas estas Funções $F'x$; $F''x$; $F'''x$; &c. se dirivão a primeira de Fx, e as seguintes successivamente humas das outras por meio da aplicação constante das mesmas operações.

§. 3.º

Para realizar estas he indispensavel determinar φu; $\varphi' u$; $\varphi'' u$; &c. ou seja por considerações relativas á natureza das quantidades variaveis, que são raizes de Fx, ou por suposições arbitrarias, que designem casos ou hypotheses distinctas. Servindo-nos d'este segundo meio, se supozermos $x.\varphi x = fx$; $x\varphi' x = f'x$; $x\varphi'' x = f''x$; &c. teremos

$$Fx = F. + fx.\ F.' + fx.f'x.\ F.'' + fx.f'x.f''x.\ F.''' + \&c.$$

e serão fx; $f'x$; $f''x$; &c. outras tantas funções arbitrarias; e por isso se supozermos, que seja $fx = \text{lim.}\ f'x = \text{lim.}\ f''x = \text{lim.}\ f'''x$; &c. ainda poderemos sujeitar as Funções $f'x$; $f''x$; $f'''x$; &c. a condições, que sejão compativeis com a de ser fx o seu limite commum; e por tanto podemos suppôr

$$f'x = f(x + \xi)$$
$$f''x = f(x + 2\xi)$$
$$f'''x = f(x + 3\xi)$$
$$\&c.$$

sendo ξ sem limite em diminuição. A substituição d'estes valores na formula antecedente a converte em

$$Fx = F. + fx.\ F.' + fx.f(x+\xi)\ F.'' + fx\ f(x+\xi)\ f(x+2\xi)\ F.''' + \&c.$$

ou no desenvolvimento ordenado segundo as faculdades progressivas de fx, das quaes Wronski na sua Memoria sobre a Technia da Algorithmia apresentada ao Instituto de França deduzio todas as formulas conhecidas até então pelos Geometras para a conversão das Funções em Series, e cuja demonstração os Commissarios do mesmo Instituto mostravão desejar.

Se supozermos $\varphi' x = \frac{1}{2}\varphi x$; $\varphi'' x = \frac{2}{3}\varphi' x$; $\varphi''' x = \frac{3}{4}\varphi'' x$; &c. o nosso desenvolvimento tomará a fórma seguinte,

$$Fx = F. + \frac{x\,\varphi x}{1} F' + \frac{x^2 \varphi^2 x}{1.2} F.'' + \frac{x^3\,\varphi^3 x}{1.2.3} F.''' + \frac{x^4\,\varphi^4 x}{1.2.3.4} F.^{IV} + \&c.$$

e se de mais supozermos $\varphi x = x.^{o}$, elle se reduzirá a

$$Fx = F. + \frac{x}{1} F.' + \frac{x^2}{1.2} F.'' + \frac{x^3}{1.2.3} F.''' + \frac{x^4}{1\,2\,3.4} F.^{IV} + \&c.$$

que he o desenvolvimento, que se reputava geral antes que o mesmo Wronski mostrasse, que elle he hum caso particular do desenvolvimento segundo as faculdades progressivas de huma Função arbitraria de x: ambos porém como he visivel são casos particulares do nosso desenvolvimento geral.

Quanto ao de Wronski devo confessar, que este Escriptor tarto na primeira Parte da sua Philosophia das Mathematicas, como na sua Refutação da Theoría das Funções analyticas (unicas Obras que d'elle tenho lido) o reconhece por hum caso particular de outro desenvolvimento mais geral, que em ambas as ditas Obras indica, o qual suposto que alli se não ache demonstrado, e seja deduzido dos principios da Philosophia transcendental, da qual ingenuamente confesso que quasi nada comprehendo, he provavel que coincida com o que neste Tratado apresento deduzido dos principios da Theoría dos Limites, os quaes desde logo, que se me offerecêrão na carreira de meus primeiros estudos, facilmente comprehendi, e que ainda agora se me figurão serem o fundamento unico de tudo quanto ha transcendente assim na Algorithmia como na Geometria. Pelo que respeita porém ao desenvolvimento antecedente reputado por geral, em que consiste o Theorema de Taylor, e a que conduzem todos os Methodos até agora conhecidos debaixo das denominações de Cálculo das Derivações, e de Cálculo das Funções, ou Theoría das Funções analyticas, os quaes não são senão diversas traducções ou disfarces do sobredito Theorema, está bem longe de poder servir de fundamento á Theorica geral das derivações, considerada na generalidade, que presupoem a denominação de *Funções derivadas* dada a todas aquellas que se pódem deduzir de huma Função primitiva, e successivamente humas das outras por meio de operações analogas constantemente repetidas.

§. 4.°

Se x for fluente, tambem Fx será fluente, ou deverá considerar-se como tal na generalidade da sua representação: e como nesta concepção inteletual entra necessariamente a idéa de Tempo, he evidente, que representando por t o tempo durante o qual x se supoem ter fluido para passar do seu estado primitivo para hum qualquer dos seus estados variados, e representando por $\triangle x$, e $\triangle Fx$ as fluxões hypotheticas de x e Fx, será como demonstrei em a minha Memoria sobre os verdadeiros principios do Methodo das Fluxões, impressa em o 1.° Tomo das Memorias de Mathematica e Physica da Academia Real das Sciencias de Lisboa

$$\frac{\triangle Fx}{\triangle x} = \frac{F(x + t\triangle x) - Fx}{t\triangle x}$$

$$\frac{\triangle F'x}{\triangle x} = \frac{F'(x + t\triangle x) - F'x}{t\triangle x}$$

$$\frac{\triangle F''x}{\triangle x} = \frac{F''(x + t\triangle x) - F''x}{t\triangle x}$$

&c.

Comparando esta Serie de equações com a Serie expressada em o §. 2.º, a qual exprime os valores de $F'(x,u)$; $F''(x,u)$; $F'''(x,u)$; &c. veremos, que para os de $\frac{\triangle Fx}{\triangle x}$; $\frac{\triangle F'x}{\triangle x}$; $\frac{\triangle F''x}{\triangle x}$; &c. serem identicos com aquelles he necessario que seja $u = t \triangle x$, e $\varphi u = 1$; $\varphi' u = 1$; $\varphi'' u = 1$; &c. Esta ultima condição reduziria os desenvolvimentos de $F(x+u)$ a seguinte fórma,

$$F(x+u) = Fx + uF^{I}x + u^2 F''x + u^3 F'''x + \&c.$$

e

$$F(x+u) = Fu + xF'u + x^2 F''u + x^3 F'''u + \&c.$$

do ultimo dos quaes se deduz,

$$Fx = F. + xF.^{I} + x^2 F.^{II} + x^3 F.^{III} + \&c.$$

§. 5º.

Mas ainda que este modo de sujeitar o desenvolvimento geral a representar aquelle, que compete ás Funções de quantidades fluentes seja o mais simples, e natural; não he com tudo o unico. Nós podiamos em vez de supormos

$$F'(x,u) = \frac{\triangle Fx}{\triangle x}$$

$$F''(x,u) = \frac{\triangle F'x}{\triangle x}$$

$$F'''(x,u) = \frac{\triangle F''x}{\triangle x}$$

&c.

ter suposto

$$\varphi u.F'(x,u) = \frac{\triangle Fx}{\triangle x}$$

$$\varphi' u.F''(x,u) = \frac{\triangle F'x}{\triangle x}$$

$$\varphi'' u.F'''(x,u) = \frac{\triangle F''x}{\triangle x}$$

&c.

e ainda que d'esta hypothese igualmente admissivel só rezulte a determinação de $u = t \triangle x$; com tudo a mesma indeterminação das Funções ... $\varphi t \triangle x$; $\varphi' t \triangle x$; $\varphi'' t \triangle x$; &c., as quaes não ficão sujeitas a outra condição senão a de serem capazes de limite, póde servir com utilidade para a transformação das Series.

§. 6.°

Em hum e outro caso para determinar a significação de $F'x$; $F''x$; $F'''x$; &c. são necessarias ulteriores considerações. Para dar ao rezultado d'estas a maior simplicidade possivel, suponhamos que x flua uniformemente então Δx será constante e identico com dx. E segundo a hypothese indicada em o §. 4.° será tambem

$$\left.\begin{aligned}
F(x+t\Delta x) &= Fx + t\Delta x\,F'x + t^2\Delta x^2 F''x + t^3\Delta x^3 F'''x + \&c.\\
F(x+2t\Delta x) &= Fx + 2t\Delta x\,F'x + 2^2 t^2\Delta x^2 F''x + 2^3 t^3\Delta x^3 F'''x + \&c.\\
F(x+3t\Delta x) &= Fx + 3t\Delta x\,F'x + 3^2 t^2\Delta x^2 F''x + 3^3 t^3\Delta x^3 F'''x + \&c.
\end{aligned}\right\} A$$

e em geral

$$F(x+nt\Delta x) = Fx + nt\Delta x\,F'x + n^2 t^2\Delta x^2 F''x + n^3 t^3\Delta x^3 F'''x + \&c.$$

Tomando as diferenças entre Fx e a primeira das formulas A; entre a primeira e a segunda; entre a segunda e a terceira, e assim por diante teremos

$$\left.\begin{aligned}
t\Delta Fx &= t\Delta x\,F'x + t^2\Delta x^2 F''x + t^3\Delta x^3 F'''x + t^4\Delta x^4 F^{IV}x + \&c.\\
t\Delta F(x+t\Delta x) &= t\Delta x\,F'x + (2^2-1)t^2\Delta x^2 F''x + (2^3-1)t^3\Delta x^3 F'''x + (2^4-1)t^4\Delta x^4 F^{IV}x + \&c.\\
t\Delta F(x+2t\Delta x) &= t\Delta x\,F'x + (3^2-2^2)t^2\Delta x^2 F''x + (3^3-2^3)t^3\Delta x^3 F'''x + (3^4-2^4)t^4\Delta x^4 F^{IV}x + \&c.\\
t\Delta F(x+3t\Delta x) &= t\Delta x\,F'x + (4^2-3^2)t^2\Delta x^2 F''x + (4^3-3^3)t^3\Delta x^3 F'''x + (4^4-3^4)t^4\Delta x^4 F^{IV}x + \&c.
\end{aligned}\right\} B$$

e em geral

$$t\Delta F(x+nt\Delta x) = t\Delta x\,F'x + \left((n+1)^2-n^2\right)t^2\Delta x^2 F''x + \left((n+1)^3-n^3\right)t^3\Delta x^3 F'''x + \&c.$$

Tomando as diferenças entre estas formulas B, teremos

$$\left.\begin{aligned}
t^2\Delta^2 Fx &= 2t^2\Delta x^2 F''x + (2^3-2)t^3\Delta x^3 F'''x + (2^4-2)t^4\Delta x^4 F^{IV}x + \&c.\\
t^2\Delta^2 F(x+t\Delta x) &= 2t^2\Delta x^2 F''x + (3^3-2.3^2+1)t^3\Delta x^3 F'''x + (3^4-2.2^4+1)t^4\Delta x^4 F^{V}x + \&c.\\
t^2\Delta^2 F(x+2t\Delta x) &= 2t^2\Delta x^2 F''x + (4^3-2.3^3+2^3)t^3\Delta x^3 F'''x + (4^4-2\,3^4+2^4)t^4\Delta x^4 F^{V}x + \&c.
\end{aligned}\right\} C$$

e em geral

$$t^2\Delta^2 F(x+nt\Delta x) = 2t^2\Delta x^2 F''x + \left((n+2)^3-2(n+1)^3+n^3\right)t^3\Delta x^3 F'''x + \left((n+2)^4-2(n+1)^4+n^4\right)t^4\Delta x^4 F^{IV}x + \&c.$$

Tomando semelhantemente as diferenças entre estas formulas C, teremos

$$\left.\begin{aligned}
t^3\Delta^3 Fx &= 2.3t^3\Delta x^3 F'''x + (3^4-3.2.4+3)t^4\Delta x^4 F^{IV}x + (3^5-3.2^5+3)t^5\Delta x^5 F^{V}x + \&c.\\
t^3\Delta^3 F(x+t\Delta x) &= 2.3t^3\Delta x^3 F'''x + (4^4-3.3^4+3.2^4-1)t^4\Delta x^4 F^{IV}x +\\
&\quad (4^5-3.3^5+3.2^5-1)t^5\Delta x^5 F^{V}x + \&c.\\
t^3\Delta^3 F(x+2t\Delta x) &= 2.3t^3\Delta x^3 F'''x + (5^4-3.4^4+3.3^4-2^4)t^4\Delta x^4 F^{IV}x +\\
&\quad (5^5-3.4^5+3.3^5-2^5)t^5\Delta x^5 F^{V}x + \&c.
\end{aligned}\right\} D$$

e em geral

$$t^3\Delta^3 F(x+nt\Delta x) = 2.3t^3\Delta x^3 F'''x + \left((n+3)^4-3(n+2)^4+3(n+1)^4-n^4\right)t^4\Delta x^4 F^{IV}x + \&c.$$

Continuando pelo mesmo modo acharíamos

$$t^4\,\Delta^4 Fx = 2.3.4.t^4\,\Delta x^4 F^{IV}x + (4^5 - 4.3.^5 + 6.2^5 - 4)\,t^5\,\Delta x^5 F^V x + \&c.$$

$$t^5\,\Delta^5 Fx = 2.3.4.5.t^5\,\Delta x^5 F^V x + (5^6 - 5.4^6 + 10.3^6 - 5.2.^6 + 5)\,t^6\,\Delta x^6 F^{VI}x + \&c.$$

e em geral

$$t^n\,\Delta^n Fx = 2.3\ldots(n-1).nt^n\,\Delta x^n F^{n}x + \left(n^{n+1} - n(n-1)^{n+1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^{n+1} \ldots \pm n\right) t^{n+1}\,\Delta x^{n+1} F^{(n+1)}x$$

$$+ \left(n^{n+2} - n(n-1)^{n+2} + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^{n+2} \ldots \pm n\right) t^{n+2}\,\Delta x^{n+2} F^{(n+2)}x$$

$$+ \&c.$$

Considerando separadamente a primeira formula de cada huma das Series de expressões B, C, D, &c. d'ellas se deduz

$$\frac{\Delta Fx}{\Delta x} = F'x + t\Delta x\,F''x + t^2\,\Delta x^2\,F'''x + t^3\Delta x^3\,F^{IV}x + \&c.$$

$$\frac{\Delta^2 Fx}{\Delta x^2} = 2\,F''x + (2^3 - 2)\,t\Delta x\,F'''x + (2^4 - 2)\,t^2\,\Delta x^2\,F^{IV}x + \&c.$$

$$\frac{\Delta^3 Fx}{\Delta x^3} = 2.3\,F'''x + (3^4 - 3.2.^4 + 3)\,t\Delta x\,F^{IV}x + (3^5 - 3.2^5 + 3)\,t^2\Delta x^2\,F^V x + \&c.$$

$$\frac{\Delta^4 Fx}{\Delta x^4} = 2.3.4.F^{IV}x + (4^5 - 4.3.^5 + 6.2.^5 - 4)\,t\Delta x\,F^V x + (4^6 - 4\,3^6 + 6.2^6 - 4)\,t^2\Delta x^2\,F^{VI}x + \&c.$$

$$\frac{\Delta^n Fx}{\Delta x^n} = 2.3\ldots(n-1).nF^{n}x + \left(n^{n+1} - \frac{n}{1}(n-1)^{n+1} + n\frac{(n-1)}{1.2}(n-2)^{n+1} - \ldots \pm n\right) t\Delta x\,F^{(n+1)}x$$

$$+ \left(n^{n+2} - \frac{n}{1}(n-1)^{n+2} + n\frac{(n-1)}{1.2}(n-2)^{n+2} - \ldots \pm n\right) t^2\,\Delta^2 x\,F^{(n+2)}x$$

$$+ \left(n^{n+3} - \frac{n}{1}(n-1)^{n+3} + n\frac{(n-1)}{1.2}(n-2)^{n+3} - \ldots \pm n\right) t^3\,\Delta x^3\,F^{(n+3)}x$$

$$+ \&c.$$

e d'aqui pela aplicação do Methodo directo dos limites se conclue

$$F'x = \frac{dFx}{dx}$$

$$F''x = \frac{d^2 Fx}{1.2\,dx^2}$$

$$F'''x = \frac{d^3 Fx}{1.2.3\,dx^3}$$

. . . . . .

$$F^{n}x = \frac{d^n Fx}{1.2.3\ldots n\,dx^n}$$

valores, que definitivamente designão a significação genuina d'estas Funções, e cuja substituição nas formulas finaes do §. 4.º as reduz a

$$\left.\begin{aligned} F(x+u) &= Fx + \frac{u}{1}\frac{dFx}{dx} + \frac{u^2}{1.2}\frac{d^2Fx}{dx^2} + \frac{u^3}{1.2.3}\frac{d^3Fx}{dx^3} + \&c. \\ F(x+u) &= Fu + \frac{x}{1}\frac{dFu}{du} + \frac{x^2}{1.2}\frac{d^2Fu}{du^2} + \frac{x^3}{1.2.3.}\frac{d^3Fu}{du^3} + \&c. \end{aligned}\right\} F$$

que são os dois desenvolvimentos em que propriamente consiste o Theorema de Taylor.

§. 7.º

Procedendo na conformidade da segunda hypothese teriamos achado

$$F'x = \frac{dFx}{\varphi.\,dx}$$

$$F''x = \frac{d^2Fx}{1.2\,\varphi.\,\varphi.'\,dx^2}$$

$$F'''x = \frac{d^3Fx}{1.2.3.\,\varphi.\,\varphi.'\,\varphi.''\,dx^3}$$

&c.

representando $\varphi.$; $\varphi'.$; $\varphi.''$; &c. os limites de φu; $\varphi' u$; $\varphi'' u$; &c., e nesse caso em vez dos dois desenvolvimentos, em que consiste o Theorema de Taylor, teriamos os dois seguintes:

$$F(x+u) = Fx + \frac{u\varphi u}{1.\varphi.}\frac{dFx}{dx} + \frac{u.^2\varphi u\ \varphi' u}{1.2.\varphi\,\varphi.'}\frac{d^2Fx}{dx^2} + \frac{u^3\varphi u\ \varphi' u.\varphi'' u}{1.2.3.\varphi.\varphi.'\varphi.''}\frac{d^3Fx}{dx^3} + \&c.$$

e

$$F(x+u) = Fu + \frac{x\varphi x}{1.\varphi.}\frac{dFu}{du} + \frac{x.^2\varphi x\ \varphi' x}{1.2\varphi.\varphi.'}\frac{d^2Fu}{du^2} + \frac{x.^3\varphi x.\varphi' x\ \varphi'' x}{1.2.3.\varphi.\varphi.'\varphi.''}\frac{d^3Fu}{du^3} + \&c.$$

§. 8.º

Supondo $u = 0$, e $du = 1$, a formula final do §. 6.º se reduz a

$$Fx = F. + x\,dF. + \frac{x^2}{1.2}d^2F. + \frac{x^3}{1.2.3}d^3F. + \frac{x^4}{1.2.3.4}d^4F. + \&c.$$

e a formula final do §. antecedente a

$$Fx = F. + \frac{x\varphi x.}{1.\varphi.}dF. + \frac{x.^2\varphi x.\ \varphi' x}{1.2\,\varphi.\,\varphi.'}d^2F. + \frac{x^3\varphi x.\,\varphi' x.\,\varphi'' x}{1.2.3.\varphi.\varphi.'\varphi.''}d^3F. + \&c.$$

representando $F.$; $dF.$; $d^2F.$; &c. os limites de Fu; dFu; d^2Fu; &c. ou os valores d'estas Funções resultantes da substituição de 1 em logar de du, e de cifra em lugar de u.

§. 9.°

Representando por ξ hum incremento arbitrario de x, e supondo

$$\varphi' x = \varphi(x+\xi)$$
$$\varphi'' x = \varphi(x+2\xi)$$
$$\varphi''' x = \varphi(x+3\xi)$$
&c.

a ultima formula do §. antecedente se converte em

$$Fx = F. + \frac{x.\varphi x}{1.\varphi.} dF. + \frac{x^{2|\xi}\varphi x}{1.2.\varphi.^2} d^2F. + \frac{x.^{3|\xi}\varphi x}{1.2.3.\varphi.^3} d^3F. + \&c.$$

designando os expoentes $2|\xi$; $3|\xi$; &c. o número dos factores das faculdades progressivas de φx relativas ao incremento ξ.

§. 10.°

Se representarmos $\frac{dFu}{du}$ por $\overset{1/}{F}u$; $\frac{d^2Fu}{du^2}$ por $\overset{2/}{F}u$; $\frac{d^3Fu}{du^3}$ por $\overset{3/}{F}u$;

e assim successivamente; e se considerarmos $Fu = \frac{d\overset{-1/}{F}u}{du}$ será

$$du\,Fu = d\overset{-1/}{F}u$$
$$du\overset{1/}{F}u = dFu$$
$$du\overset{2/}{F}u = d\overset{1/}{F}u$$
$$du\overset{3/}{F}u = d\overset{2/}{F}u$$
&c.

e as suposições de $du = 1$, e $u = 0$ farão $d\overset{-1/}{F}. = F.$; $d\,F. = \overset{1/}{F}.$; $d\overset{1/}{F}. = \overset{2/}{F}.$; e assim successivamente donde rezulta que assim como he

$$Fx = F. + x\overset{1/}{F} + \frac{x^2}{1.2}\overset{2/}{F}. + \frac{x^3}{1.2.3}\overset{3/}{F}. + \frac{x^4}{1.2.3.4}F.^{4/} + \&c. \ldots\ldots A$$

será tambem

$$Fx = \overset{-1/}{F}. + xF. + \frac{x^2}{1.2}\overset{1/}{F}. + \frac{x^3}{1.2.3}\overset{2/}{F}. + \frac{x^4}{1.2.3.4}\overset{3/}{F}. + \&c.$$

mas sendo $dx\,Fx = d\overset{-1/}{Fx}$; he $\int dx\,Fx = \overset{-1/}{Fx}$; logo

$$\int dx\,Fx = \overset{-1/}{F}. + xF. + \frac{x^2}{1.2}\overset{2/}{F}. + \frac{x^3}{1.2.3}\overset{3/}{F}. + \frac{x^4}{1.2.3.4}\overset{4/}{F}. \&c.$$

expressão que igualmente se acharia multiplicando os dois membros da equação A por dx, aplicando-lhe o Methodo inverso das Fluxões, e determinando a constante arbitraria pela condição de ser $\int dx\, Fx = F.^{-1}$, sendo $x = 0$.

Esta formula satisfaz como he visivel a todos os Problemas do Methodo inverso das Fluxões relativos ás Funções de huma só Fluente x, sempre que $x = 0$ não torna incalculavel alguma das Funções $F.$; $F.^{1}$; $F.^{2}$; $F.^{3}$ &c. Chamo incalculaveis aquellas expressões, que o commum dos Geometras chamão infinitas; e designão em geral por este simbolo ∞, as quaes nos calculos em consequencia de certas hypotheses se apresentão indicadas por huma expressão fraccionaria cujo denominador he cifra: o que equivale a huma divisão sem divisor, ou á indicação de hum absurdo.

§. 11.°

Todo o polinomio da fórma

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \&c.$$

qualquer que seja o número dos seus termos se póde considerar como proveniente do desenvolvimento de huma Função binomial $F(u+x)$ em a qual depois de desenvolvida e ordenada relativamente a x, se supoz $u = 0$; e por consequencia a determinação da somma dos termos de huma serie qualquer, ou a determinação da Função de cujo desenvolvimento ella deve rezultar se reduz á solução do seguinte Problema » Dados os valores » de Fx; $\frac{dFx}{dx}$; $\frac{d^2Fx}{dx^2}$; &c. no caso de $x = 0$ determinar a fórma de » Fx. » por quanto dada huma serie qualquer

$$A + B + C + D + E + F + \&c.$$

nada obsta a que a consideremos como representando o caso particular da serie

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \&c.$$

que rezulta da suposição de $x = 1$: e como da sua composição com a formula primeira do §. 8.° rezulta

$F. = A$; $dF. = B$; $d^2F. = 1.2\,C$; $d^3F. = 1.2.3\,D$; e em geral $d^nF. = 1.2.\ldots(n-1)\,nV$ representando por V o termo $n+1$ da Serie proposta, estas são as condições que identificão as duas Series: e por consequencia os dados que a proposta offerece para a determinação da somma dos seus termos.

§. 12.°

Mas deixando por ora esta investigação alheia do nosso actual objecto, convem que notemos que para reduzir $F(x+u)$ a $F.$ tanto vale suppôr juntamente $x=0$, e $u=0$ como suppôr $x+u=0$, e por tanto será sempre

$$F.=F-x+\frac{x}{1}dF-x+\frac{x^2}{1.2}d^2F-x+\frac{x^3}{1.2.3}d^3F-x+\&c.$$

e

$$F.=Fx-\frac{x}{1}dFx+\frac{x^2}{1.2}d^2Fx-\frac{x^3}{1.2.3}d^3Fx+\&c.$$

sendo x uniformente fluente e $dx=1$: donde se segue, que será tambem

$$F.=\frac{1}{2}\left((Fx+F-x)-\frac{x}{1}(dFx-dF-x)+\frac{x^2}{1.2.}(d^2Fx+d^2F-x)-\&c.\right)$$

e

$$0=(Fx-F-x)-\frac{x}{1}(dFx-dF-x)+\frac{x^2}{1.2}(d^2Fx-d^2F-x)-\&c.$$

§. 13°.

Se F denotar Função par será

$$F.=\frac{1}{2}(Fx+F-x);$$

por quanto neste caso he

$$d^{2m}Fx+d^{2m}F-x=0$$

e

$$d^{2m+1}Fx-d^{2m+1.}F-x=0$$

sendo m número inteiro ou cifra

§. 14.°

Se na formula primeira do §. 8.° fizermos $x=1$; e se representarmos por $F1$ o valor de Fx quando $x=1$, teremos

$$F1=F.+dF.+\frac{d^2F.}{1.2}+\frac{d^3F.}{1.2.3}+\frac{d^4F.}{1.2.3.4}+\&c.$$

formula, que póde muitas vezes ter aplicação como acontece na determinação do número cujo logarithmo hyperbolico he 1. Este número costuma

representar-se por e. Sendo pois $Fx = e^x$, a suposição de $x = 0$, faz $F. = 1$; $dF. = 1$; $d^2F. = 1$; e em geral $d^nF. = 1$: mas a suposição de $x = 1$ faz $F1 = e$; e por tanto substituindo estes valores na formula antecedente teremos

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5} + \&c.$$

Fazendo as substituições dos valores de $F.$ e suas Fluxões na formula primeira do §. 8°, achariamos immediatamente

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3\,4.} + \&c.$$

§. 15.°

Se na segunda das formulas F do §.° 6. supozermos $u = 1$, teremos

$$F(1+x) = F1 + \frac{x}{1}\,dF1 + \frac{x^2}{1.2.}\,d^2F1 + \frac{x^3}{1.2.3}\,d^3F1 + \&c.$$

expressão na qual $dF1$; d^2F1; d^3F1; &c. denotão os valores de dFx; d^2Fx; d^3Fx; &c. no caso de $x = 1$: mas se fizermos a mesma suposição na primeira, teremos

$$F(1+x) = Fx + \frac{dFx}{1} + \frac{d^2Fx}{1.2} + \frac{d^3Fx}{1.2.3} + \&c.$$

§. 16.°

Supondo $x = 1$ por huma e outra d'estas formulas se obtem

$$F2 = F1 + \frac{dF1}{1} + \frac{d^2F1}{1.2} + \frac{d^3F1}{1.2.3} + \&c.$$

mas as suposições successivas de $x = 2$; $x = 3$; $x = 4$; &c. dando

$$F3 = F1 + 2\,\frac{dF1}{1} + 2.2\,\frac{d^2F1}{1.2} + 2^3\,\frac{d^3F1}{1.2.3} + \&c.$$

e

$$F3 = F2 + \frac{dF2}{1} + \frac{d^2F2}{1.2} + \frac{d^3F2}{1.2.3} + \&c.$$

$$F4 = F1 + 3\,\frac{dF1}{1} + 3^2\,\frac{d^2F1}{1.2} + 3.3\,\frac{d^3F1}{1\,2.3} + \&c.$$

e

$$F4 = F3 + \frac{dF3}{1} + \frac{d^2F3}{1.2} + \frac{d^3F3}{1.2.3} + \&c.$$

e em geral a suposição de $x = n$ dando

$$Fn = F1 + (n-1)\frac{dF1}{1} + (n-1)^2\frac{d^2F1}{1.2} + (n-1)^3\frac{d^3F1}{1.2.3} + \&c.$$

e

$$Fn = F(n-1) + \frac{dF(n-1)}{1} + \frac{d^2F(n-1)}{1.2} + \frac{d^3F(n-1)}{1.2.3} + \&c.$$ } B

nos mostrão, que as Funções do número 2 se não podem obter por meio de operações fluxionaes senão de hum só modo, em tanto que as de todos os outros se podem obter por diferentes modos: a saber as do número 3 por dois; as do número 4 por trez; as do número 5 por quatro; e em geral as do número n por $n-1$, como he facil de ver, por quanto, se na segunda expressão de Fn se substitue em logar de $F(n-1)$ e suas fluxões os seus correspondentes valores em Funções de $n-2$, se tem

$$Fn = F(n-2) + 2\frac{dF(n-2)}{1} + 2.^2\frac{d^2F(n-2)}{1.2} + 2.^3\frac{d^3F(n-2)}{1.2.3} + \&c.$$

se nesta nova expressão de Fn se substitue em logar de $F(n-2)$ e suas fluxões os seus correspondentes valores em funções de $n-3$, se tem

$$Fn = F(n-3) + 3\frac{dF(n-3)}{1} + 3.^2\frac{d^2F(n-3)}{1.2} + 3.^3\frac{d^3F(n-3)}{1.2.3} + \&c.$$

e assim successivamente de sorte que em geral se terá

$$Fn = F(n-m) + m\frac{dF(n-m)}{1} + m.^2\frac{d^2F(n-m)}{1.2} + m^3\frac{d^3F(n-m)}{1.2.3} + \&c.$$

podendo-se continuar as substituições até ser $m = n-2$; pois que neste caso sendo a substituição a do unico valor de $F2$; se obtem o valor de Fn expressado em Função de 1.

§. 17.

Estes valores são na verdade algumas vezes só diferentes na aparencia, como acontece na determinação das potencias inteiras. Seja por exemplo $Fn = n.^m$ A expressão de $n.^m$ em Função de 1 será

$$n^m = 1 + \frac{m}{1}(n-1) + \frac{m(m-1)}{1.2}(n-1)^2 + \ldots\ldots + m(n-1)^{m-1} + (n-1)^m$$

e a sua expressão em Função de $n-1$ será

$$n^m = (n-1)^m + m(n-1)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}(n-1)^{m-2} + \ldots$$

$$+ \frac{m(m-1)}{1.2}(n-1)^2 + \frac{m}{1}(n-1) + 1$$

Da mesma sorte as expressões de $n.^m$ em Função de 2 e em Função de $(n-2)$ serão as seguintes

$$n.^m = 2^m + m(n-2)\,2^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}(n-2).^2\,2.^{m-2} + \ldots\ldots + 2m(n-2)^{m-1} + (n-2)^m$$

$$n.^m = (n-2)^m + 2m(n-2)^{m-1} + \ldots\ldots + \frac{m(m-1)}{1.2}(n-2).^2\,2.^{m-2} + m(n-2).\,2.^{m-1} + 2.^m$$

as quaes são entre si identicas mas inversamente escritas. Porém já não acontece o mesmo com as potencias fraccionarias pois que sendo $Fn = n^{\frac{1}{m}}$ a sua expressão em Função de 1 nos dá

$$n^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{n-1}{m} - \frac{(m-1)}{2}\frac{(n-1)^2}{m^2} + \frac{(m-1)}{2}\frac{(2m-1)}{3}\frac{(n-1)^3}{m^3} - \frac{(m-1)}{2}\frac{(2m-1)}{3}\frac{(3m-1)}{4}\frac{(n-1)^4}{m^4} + \&c.$$

e a sua expressão em Função de $(n-1)$ nos dá

$$n^{\frac{1}{m}} = (n-1)^{\frac{1}{m}}\left(1 + \frac{1}{m(n-1)} - \frac{(m-1)}{2m^2(n-1)^2} + \frac{(m-1)(2m-1)}{2.3.m^3(n-1)^3} - \frac{(m-1)(2m-1)(3m-1)}{2.3.4\,m^4(n-1)^4} + \&c.\right)$$

§. 18.º

Sendo $Fn = \text{Log. } n$, a primeira das formulas B do §. 16.º nos dá

$$\text{Log. } n = (n-1) - \tfrac{1}{2}(n-1)^2 + \tfrac{1}{3}(n-1)^3 - \tfrac{1}{4}(n-1)^4 - \tfrac{1}{5}(n-1)^5 - \&c.$$

e a segunda

$$\text{Log. } n = \text{Log. }(n-1) + \frac{1}{n-1} - \tfrac{1}{2}\frac{1}{(n-1)^2} + \tfrac{1}{3}\frac{1}{(n-1)^3} - \tfrac{1}{4}\frac{1}{(n-1)^4} + \&c.$$

Se escrevermos $n+1$ em logar de n, e subtrairmos a segunda formula da primeira teremos

$$\text{Log. } n = \frac{n^2-1}{n} - \tfrac{1}{2}\frac{n^4-1}{n^2} + \tfrac{1}{3}\frac{n^6-1}{n^3} - \tfrac{1}{4}\frac{n^8-1}{n^4} + \tfrac{1}{5}\frac{n^{10}-1}{n^5} - \&c.$$

A formula transcrita no fim do §. 16.º dá

$$\text{Log. } n = \text{Log. }(n-m) + \frac{m}{n-m} - \tfrac{1}{2}\frac{m^2}{(n-m)^2} + \tfrac{1}{3}\frac{m^3}{(n-m)^3} - \tfrac{1}{4}\frac{m^4}{(n-m)^4} + \&c.$$

Mas escrevendo-se seguidamente

$$\text{Log. } n = \text{Log. }(n-1) + \frac{1}{n-1} - \tfrac{1}{2}\frac{1}{(n-1)^2} + \tfrac{1}{3}\frac{1}{(n-1)^2} - \tfrac{1}{4}\frac{1}{(n-1)^4} + \&c.$$

$$\text{Log.}(n-1) = \text{Log.}(n-2) + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(n-2)^2} + \frac{1}{3}\frac{1}{(n-2)^3} - \frac{1}{4}\frac{1}{(n-2)^4} + \&c.$$

$$\text{Log.}(n-2) = \text{Log.}(n-3) + \frac{1}{n-3} - \frac{1}{2}\frac{1}{(n-3)^2} + \frac{1}{3}\frac{1}{(n-3)^3} - \frac{1}{4}\frac{1}{(n-3)^4} + \&c.$$

. . . . . .

$$\text{Log.}\left(n-(m-1)\right) = \text{Log.}(n-m) + \frac{1}{n-m} - \frac{1}{2}\frac{1}{(n-m)^2} + \frac{1}{3}\frac{1}{(n-m)^3} - \frac{1}{4}\frac{1}{(n-m)^4} + \&c.$$

e sommando teremos

$$\text{Log. } n = \text{Log.}(n-m) + \overset{m}{S}\frac{1}{n-1} - \frac{1}{2}\overset{m}{S}\frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{3}\overset{m}{S}\frac{1}{(n-1)^3} - \frac{1}{4}\overset{m}{S}\frac{1}{(n-1)^4} + \&c.$$

representando por $\overset{m}{S}$ a somma dos primeiros m termos da Serie cujo primeiro termo he a quantidade escrita junto d'este Simbolo, e cuja lei he a que se manifesta da columna vertical, a que cada hum d'elles pertence.

§. 19.°

Se na formula final do §. 10.° escrevermos $1+x$ em logar de x teremos

$$\int dx\, F(1+x) = \overset{-1}{F}_{\cdot} + (1+x)\,F_{\cdot} + \frac{(1+x)^2}{1.2}\overset{1}{F}_{\cdot} + \frac{(1+x)^3}{1.2.3}\overset{2}{F}_{\cdot} + \frac{(1+x)^4}{1.2.3.4}\overset{3}{F}_{\cdot} + \&c.$$

a qual escrita da seguinte maneira

$$\begin{aligned}\int dx\, F(1+x) = {} & \overset{-1}{F}_{\cdot} + F_{\cdot} + \frac{\overset{1}{F}_{\cdot}}{1.2} + \frac{\overset{2}{F}_{\cdot}}{1.2.3} + \frac{\overset{3}{F}_{\cdot}}{1.2.3.4} + \&c. \\ & + x\left(F_{\cdot} + \overset{1}{F}_{\cdot} + \frac{\overset{2}{F}_{\cdot}}{1.2} + \frac{\overset{3}{F}_{\cdot}}{1.2.3} + \frac{\overset{4}{F}_{\cdot}}{1.2.3.4} + \&c.\right) \\ & + \frac{x^2}{1.2}\left(\overset{1}{F}_{\cdot} + \overset{2}{F}_{\cdot} + \frac{\overset{3}{F}_{\cdot}}{1.2} + \frac{\overset{4}{F}_{\cdot}}{1.2.3} + \frac{\overset{5}{F}_{\cdot}}{1.2.3.4} + \&c.\right) \\ & + \frac{x^3}{1.2.3}\left(\overset{2}{F}_{\cdot} + \overset{3}{F}_{\cdot} + \frac{\overset{4}{F}_{\cdot}}{1.2} + \frac{\overset{5}{F}_{\cdot}}{1.2.3} + \frac{\overset{6}{F}_{\cdot}}{1.2.3.4} + \&c.\right) \\ & + \&c.\end{aligned}$$

nos mostra que he

$$\int dx\, F(1+x) = \overset{-1}{F}1_{\cdot} + \frac{x}{1}F1 + \frac{x^2}{1.2}\overset{1}{F}1 + \frac{x^3}{1.2.3}\overset{2}{F}1 + \&c.$$

§. 20.º

Sendo $x = z - 1$, será $dx = dz$; e $F(1+x) = Fz$; e por tanto substituindo estas expressões na formula antecedente ella se converterá em

$$\int dz\, Fz = F\,{}^{-1}_{1} + \frac{z-1}{1} F\,{}^{1}_{1} + \frac{(z-1)^2}{1.2} F\,{}^{2}_{1} + \frac{(z-1)^3}{1.2.3} F\,{}^{3}_{1} + \frac{(z-1)^4}{1.2.3.4} F\,{}^{4}_{1} + \&c.$$

formula que terá logar em os casos em que o não póde ter a do §. 10º, em quanto Fz for huma Função simples de z.

§. 21.º

Se da formula final do §. 19. tirarmos a do §. 10.º teremos

$$\int dx\, F(1+x) - \int dx\, Fx = \left(F\,{}^{-1}_{1} - F\,{}^{-1}_{0}\right) + \frac{x}{1}\left(F\,{}^{1}_{1} - F\,{}^{1}_{0}\right) + \frac{x^2}{1.2}\left(F\,{}^{2}_{1} - F\,{}^{2}_{0}\right) + \frac{x^3}{1.2.3}\left(F\,{}^{3}_{1} - F\,{}^{3}_{0}\right) + \&c.$$

mas he $\int dx\, F(1+x) - \int dx\, Fx = \int dx \left(F(1+x) - Fx\right) = \int dx.\, t\, \Delta Fx = t \Delta \int dx\, Fx$; e por tanto teremos

$$\Delta \int dx\, Fx = \Delta F\,{}^{-1}_{0} + x \Delta F\,{}^{1}_{0} + \frac{x^2}{1.2} \Delta F\,{}^{2}_{0} + \frac{x^3}{1.2.3} \Delta F\,{}^{3}_{0} + \&c.$$

§. 22.º

Se nesta formula escrevermos $1+x$ em logar de x teremos

$$\Delta \int dx\, F(1+x) = \Delta F\,{}^{-1}_{0} + \Delta F\,{}^{1}_{0} + \frac{\Delta F\,{}^{1}_{0}}{1.2} + \frac{\Delta F\,{}^{2}_{0}}{1.2.3} + \frac{\Delta F\,{}^{3}_{0}}{1.2.3.4} + \&c.$$

$$+ x\left(\Delta F\,{}^{1}_{0} + \Delta F\,{}^{2}_{0} + \frac{\Delta F\,{}^{2}_{0}}{1.2} + \frac{\Delta F\,{}^{3}_{0}}{1.2.3} + \frac{\Delta F\,{}^{4}_{0}}{1.2.3.4} + \&c.\right)$$

$$+ \frac{x^2}{1.2}\left(\Delta F\,{}^{2}_{0} + \Delta F\,{}^{3}_{0} + \frac{\Delta F\,{}^{3}_{0}}{1.2} + \frac{\Delta F\,{}^{4}_{0}}{1.2.3} + \frac{\Delta F\,{}^{5}_{0}}{1.2.3.4} + \&c.\right)$$

$$+ \&c.$$

formula que se reduz a

$$\Delta \int dx\, F(1+x) = \Delta F\,{}^{-1}_{1} + \frac{x}{1} \Delta F\,{}^{1}_{1} + \frac{x^2}{1.2} \Delta F\,{}^{2}_{1} + \frac{x^3}{1.2.3} \Delta F\,{}^{3}_{1} + \&c.$$

se d'esta tirarmos a ultima do §. antecedente teremos

$$\Delta^2 \int dx\, F x = \Delta^2 F.^{-1,} + \frac{x}{1} \Delta^2 F. + \frac{x^2}{1.2} \Delta^2 F.^{1,} + \frac{x^3}{1.2.3} \Delta^2 F.^{2,} + \&c.$$

§. 23.°

Continuando a proceder pelo mesmo estilo acharemos em geral

$$\Delta^n \int dx\, F x = \Delta^n F.^{-1,} + \frac{x}{1} \Delta^n F. + \frac{x^2}{1.2} \Delta^n F.^{1,} + \frac{x^3}{1.2.3} \Delta^n F.^{2,} + \&c.$$

expressão, que igualmente poderiamos ter deduzido da consideração immediata da formula do §. 8.° ; por quanto contemplando $\Delta^n F$ como hum algorithmo funcional simples, e escrevendo-o em logar de F, aquella formula se converte em

$$\Delta^n F x = \Delta^n F. + \frac{x}{1} d \Delta^n F. + \frac{x^2}{1.2} d^2 \Delta^n F. + \frac{x^3}{1.2.3} d^3 \Delta^n F. + \&c.$$

a qual he equivalente a

$$\Delta^n F x = \Delta^n F. + \frac{x}{1} \Delta^n F.^{1,} + \frac{x^2}{1.2} \Delta^n F.^{2,} + \frac{x^3}{1.2.3} \Delta^n F.^{3,} + \&c.$$

e por tanto supondo $\int dx\, Fx = F x^{-1,}$ fica evidente que he

$$\Delta^n F x^{-1,} = \Delta^n \int dx\, F x = \Delta^n F.^{-1,} + \frac{x}{1} \Delta^n F. + \frac{x^2}{1.2} \Delta^n F.^{1,} + \frac{x^3}{1.2.3} \Delta^n F.^{2,} + \&c.$$

Mas sendo $\Delta^n Fx$ rigorosamente huma Função dupla, isto seria huma antecipação ou inversão de ordem na deducção das proposições, que pretendo incluir neste Tratado.

§. 24.°

Se indicarmos por Fx o producto de duas quaesquer funções de x, as quaes represento por φx, e fx será

$$F x = \varphi x . f x.$$

e por que $x = 0$ faz $F. = \varphi . f.$; $dF. = d(\varphi . f.)$; $d^2 F. = d^2 (\varphi . f.)$ &c. será

$$\varphi x . fx = \varphi . f. + \frac{x}{1} d(\varphi . f.) + \frac{x^2}{1.2} d^2 (\varphi . f.) + \frac{x^3}{1.2.3} d^3 (\varphi . f.) + \&c.$$

ou efeituando as fluxionações indicadas

$$\varphi x . f x = \varphi . f. + \frac{x}{1} \left(\varphi . d f. + f. d \varphi . \right)$$

$$+\frac{x^2}{1.2}\left(\varphi.d^2f.+2\,d\varphi.df.+f.d^2\varphi.\right)$$

$$+\frac{x^3}{1.2.3}\left(\varphi.d^3f.+3\,d\varphi.d^2f.+3\,df.d^2\varphi.+d^3\varphi.\right)$$

$$+\frac{x^4}{1.2.3.4}\left(\varphi.d^4f.+4\,d\varphi.d^3f.+6\,d^2f.d^2\varphi.+4\,df.d^3\varphi.+f.d^4\varphi.\right)$$

$$+\,\&c.$$

Serie cujo termo geral he

$$\frac{x^n}{1.2.(\ldots)(n-1)n}\left(\varphi.d^nf.+n\,d\varphi.d^{n-1}f.+n\frac{(n-1)}{1.2}d^2\varphi.d^{n-2}f.+\ldots\ldots+n.df.d^{n-1}\varphi.+f.d^n\varphi.\right)$$

e serve para achar por meio de operações fluxionaes o producto de duas quaesquer Series ou polinomios

$$\varphi.+x\,d\varphi.+\frac{x^2}{1.2}d^2\varphi.+\frac{x^3}{1.2.3}d^3\varphi.+\frac{x^4}{1.2.3.4}d^4\varphi.+\&c.$$

$$f.+x\,df.+\frac{x^2}{1.2}d^2f.+\frac{x^3}{1.2.3}d^3f.+\frac{x^4}{1.2.3.4}d^4f.+\&c.$$

expressado por huma Serie ordenada segundo as potencias inteiras de x.

§. 25.°

Sendo $Fx=\frac{\varphi x}{fx}\,\varphi x.\overline{fx}^{-1}$, será

$$\frac{\varphi x}{fx}=\frac{\varphi.}{f.}+\frac{x}{1}d\left(\frac{\varphi.}{f.}\right)+\frac{x^2}{1.2}d^2\left(\frac{\varphi.}{f.}\right)+\frac{x^3}{1.2.3}d^3\left(\frac{\varphi.}{f.}\right)+\&c.$$

e efeituando as fluxionações indicadas

$$\frac{\varphi x}{fx}=\varphi.\overline{f.}^{-1}+x\left(f.d\varphi.-\varphi.df.\right).\overline{f.}^{-2}$$

$$+\frac{x^2}{1.2}\left(f^2d^2\varphi.-2\left(f.d\varphi.-\varphi.df.\right)df.-f.\varphi.d^2f.\right)\overline{f.}^{-3}$$

$$+\frac{x^3}{1.2.3}\left(f.^3d^3\varphi.-3\left(f.^2d^2\varphi.-2f.d\varphi.df.+2\varphi.(df.)^2\right)df.+3\left(2f.\varphi.df.\right.\right.$$

$$\left.\left.-f.^2d\varphi.\right)d^2f.-\varphi.f.^2d^3f.\right)\overline{f.}^{-4}$$

$$+\,\&c.$$

formula cujos termos se obtem efeituando a fluxionação indicada em o termo geral

$$\frac{x^n}{1.2.(\ldots).n}\, d^n\left(\frac{\varphi.}{f.}\right)$$

e ordenando relativamente ás fluxões de $f.$

§. 26.°

Sendo $\varphi x = fx$, será $\varphi x.fx = f^2 x$; e por consequencia

$$f^2 x = f.^2 + 2x f.\, df.$$
$$+ \frac{2x^2}{1.2}\left(f.\, d^2 f. + (df.)^2\right)$$
$$+ \frac{2x^3}{1.2.3}\left(f.\, d^3 f. + 3\, df.\, d^2 f.\right)$$
$$+ \frac{2x^4}{1.2.3.4}\left(f.\, d^4 f. + 4\, df.\, d^3 f. + 3(d^2 f.)^2\right)$$
$$+ \frac{2x^5}{1.2\ldots5}\left(f.\, d^5 f. + 5\, df.\, d^4 f. + 10\, d^2 f.\, d^3 f.\right)$$
$$+ \&c.$$

Serie, cujo termo geral he o mesmo que o da Serie expressada no §. 24°, só com a diferença de se substituir $f.$ a $\varphi.$

§. 27.°

Se fosse $\varphi x = f^2 x$; seria $\varphi x fx = f^3 x$; e por tanto

$$f^3 x = f.^3 + 3\frac{x}{1} f.^2\, df.$$
$$+ \frac{3x^2}{1.2}\left(f.^2\, d^2 f. + 2 f.\,(df.)^2\right)$$
$$+ \frac{3x^3}{1.2.3}\left(f.^2\, d^3 f. + 6 f.\, df.\, d^2 f. + 2\,(df.)^3\right)$$
$$+ \frac{3x^4}{1.2.3.4}\left(f.^2\, d^4 f. + 8 f.\, df.\, d^3 f + 6 f.\,(d^2 f.)^2 + 12\,(df.)^2\, d^2 f.\right)$$
$$+ \&c.$$

Serie, cujo termo geral se deriva do termo geral indicado no §. 24.° substituindo $f.^2$ em logar de $\varphi.$, e as fluxões de f.² em logar das fluxões de $\varphi.$

Continuando a suppôr $\varphi x = f^3 x$; $\varphi x = f^4 x$; &c. se acharião por méras substituições na formula do §. 25.° os desenvolvimentos de todas as

potencias de huma função ou Serie qualquer representada por fx; mas não ha para que seguir este caminho, visto que todos estes casos se devem achar comprehendidos no desenvolvimento geral de fx^n, que passamos a determinar

§. 28.°

Suponhamos $Fx = fx^n$. Supondo $dx = 1$, e servindo-nos da formula 1.ª do §. 8.° acharemos

$$fx^n = f.^n + nxf.^{n-1}df.$$
$$+ \frac{nx^2}{1.2}\left(f.^{n-1}d^2f. + (n-1)f.^{n-2}(df.)^2\right)$$
$$+ \frac{nx^3}{1.2.3}\left(f.^{n-1}d^3f. + 3(n-1)f.^{n-2}df.d^2f. + (n-1)(n-2)f.^{n-3}(df.)^3\right)$$
$$+ \frac{nx^4}{1.2.3.4}\left(f.^{n-1}d^4f. + \left(4(n-1)df.d^3f. + 3(n-1)(d^2f.)^2\right)f.^{n-2} + 6(n-1)(n-2)f.^{n-3}(df.)^2d^2f.\right.$$
$$\left. + (n-1)(n-2)(n-3)f.^{n-4}(df.)^4\right)$$
$$+ \&c.$$

expressão geral do desenvolvimento de huma potencia qualquer positiva de huma função, polinomio, ou Serie, ordenado segundo as potencias inteiras de x.

§. 29.°

Se o expoente de fx fosse negativo, isto he, querendo-se o desenvolvimento de fx^{-n} se acharia

$$fx^{-n} = \frac{1}{f.^n} - nx\frac{df.}{f.^{n+1}}$$
$$- \frac{nx^2}{1.2}\left(\frac{d^2f}{f.^{n+1}} - (n+1)\frac{(df.)^2}{f.^{n+2}}\right)$$
$$- \frac{nx^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3f.}{f.^{n+1}} - 3(n+1)\frac{df.d^2f.}{f.^{n+2}} + (n+1)(n+2)\frac{(df.)^3}{f.^{n+3}}\right)$$
$$- \frac{nx^4}{1.2.3.4}\left(\frac{d^4f.}{f.^{n+1}} - \frac{\left(4(n+1)df.d^3f. + 3(n+1)(d^2f.)^2\right)}{f.^{n+2}} + 6(n+1)(n+2)\frac{(df.)^2d^2f.}{f.^{n+3}} - \right.$$
$$\left. (n+1)(n+2)(n+3)\frac{(df.)^4}{f.^{n+4}}\right)$$
$$- \&c.$$

§. 30.°

Mas posto que estas formulas sejão geraes relativamente aos desenvolvimentos de $f^{2}x$; $f^{3}x$; $f^{4}x$; &c. $f^{-1}x$; $f^{-2}x$; $f^{-3}x$; &c. com tudo nenhuma d'ellas he, rigorosamente falando, função simples de x; huma e outra são funções de huma função de x; e por tanto sendo funções duplas de x, o seu desenvolvimento deve ser hum caso particular comprehendido no desenvolvimento geral das funções de fórma dupla, das quaes tratarei na seguinte Secção.

Rio de Janeiro 26 de Dezembro de 1818.

STOCKLER.

ADDITAMENTO.

DEpois de haver escrito esta Secção, cujos principios e proposições fundamentaes extrahí de alguns apontamentos, que ha mais de vinte e cinco annos havia collegido com o fim de encorporar as doutrinas nelles indicadas, em huma Obra que então havia emprehendido sobre a Analyse superior, ou Algorithmia transcendente, chegou á minha mão pela primeira vez (em 2 de Março de 1819) a preciosa Collecção periodica de Mr. Gorgone intitulada *Annaes de Mathematicas puras e applicadas.* Percorrendo rapidamente os titulos das Memorias, que se contém nos primeiros oito tomos d'esta Obra, excitou em mim particular curiosidade a Memoria de Mr. Servois Professor da Escola de Artilheria de la Fere, a que elle deu o modesto titulo de *Ensaio sobre hum novo modo de exposição dos principios de Cálculo differencial.* Esta importante materia tinha sido em outro tempo objecto de minhas meditações, e o rezultado d'ellas sendo por mim communicado ao Público em huma Memoria, que se acha impressa em o primeiro tomo das de Mathematica e Physica da Academia Real das Sciencias de Lisboa, deu occasião a huma pequena discussão em que entrei por credito d'aquella Corporação com o Redactor do Jornal intitulado *Monthly Review* sobre a exactidão dos meus principios, e sobre o seu merito relativamente aos de Mr. de La Grange expostos na sua

Theoría das Funções analyticas, que por aquelle mesmo tempo sahio tambem á luz pública. Não posso porém exprimir qual foi a minha surpreza pelo encontro, em que me achei com este douto Professor, não sobre os principios do Cálculo, mas sobre o desenvolvimento geral das Funções em Series, que eu não esperava alli encontrar. Persuadia-me ser o primeiro, que desentranhando da sua natural origem os principios fundamentaes d'esta Theoría havia reconhecido e mostrado que a extrema generalidade das formulas de Wronski publicadas na sua Technia da Algorithmia, que tanto pasmo causavão a Mr. de La Grange e a toda a Classe de Mathematica do Instituto de Pariz, longe de ser o rezultado dos principios da Philosophia transcendental adoptada por aquelle Geometra em seus escritos, he huma consequencia natural e das mais immediatas da Theoría dos Limites, que Arhimedes, e outros Geometras antigos tão habilmente empregárão em suas investigações e demonstrações Mathematicas; mas cujos principios não tinhão jámais sido desenvolvidos na conveniente extensão, nem completamente arranjados em fórma systhematica elementar antes da publicação do Compendio da Theoría dos Limites, que escrevi para uso dos meus Discipulos, e que dei á luz no anno de 1794.

He certo que com a leitura da Memoria de Mr. Servois me aconteceo o mesmo, que a Pedro Nunes com a leitura dos escritos de Gebre, e de João de Monte Régio sobre os triangulos sphericos; admirei o talento do Autor, mas nem por isso rompi o que tinha escrito sobre a mesma materia. Entre tanto a satisfação que me rezultava de considerar-me o primeiro, que manifestasse ao Público a demonstração da formula geral do desenvolvimento das Funções em Series se me desvaneceo quasi inteiramente: mas por isso mesmo que não obstante a leitura da Memoria de Mr. Servois não rompi o que tinha escrito, he do meu dever, fazer patentes as razões que a isso me determinárão, e que me determinão a publicar o meu trabalho sobre o mesmo objecto. Por isso sem pertender deprimir nem levemente a bem merecida reputação de Mr. Servois, mas só por credito da verdade e pelo bem da Sciencia ouso dizer, que pelos meus principios não só se acha mas se demostra rigorosamente a formula geral do desenvolvimento das Funções em Series, em tanto que pelos de Mr. Servois sómente se reconhece a sua possibilidade, e a sua fórma, suposta a verdade da formula de Wronski do desenvolvimento segundo as faculdades progressivas, cuja demonstração os Commissarios do Instituto de Pariz mostrárão desejar. Eis-aqui o discurso de Mr. Servois.

» Suponhamos que se tenha respectivamente

$$x = \alpha \text{ - - - - - } x = \beta \text{ - - - - - } x = \gamma \text{ - - - - - } x = \delta \text{ - - \&c.}$$

» quando

$$\varphi x = 0 \text{ - - - - } \varphi' x = 0 \text{ - - - - } \varphi'' x = 0 \text{ - - - } \varphi''' x = 0 \text{ \&c.}$$

» eu escrevo a Serie indefinida de equações,

$$\left.\begin{aligned} F x &= F \alpha + \varphi x F' x \\ F' x &= F' \beta + \varphi' x F'' x \\ F'' x &= F'' \gamma + \varphi'' x F''' x \\ F''' x &= F''' \delta + \varphi''' x F^{IV} x \\ &\text{\&c.} \end{aligned}\right\} A$$

» faço estas equações identicas supondo,

$$F' x = \frac{F x - F \alpha}{\varphi x}$$

$$F'' x = \frac{F' x - F' \beta}{\varphi' x}$$

$$F''' x = \frac{F'' x - F'' \gamma}{\varphi'' x}$$

&c.

» e tomando a somma dos productos respectivos das equações A por 1; » φx; $\varphi x . \varphi' x$; $\varphi x . \varphi' x . \varphi'' x$; &c., e reduzindo obtenho

» $$F x = F \alpha + \varphi x F' \beta + \varphi x . \varphi' x F'' \gamma + \varphi x . \varphi' x . \varphi'' x F''' \delta + \text{\&c.}$$

Mas antes de analysar este discurso seja-me permitido fazer huma observação. Wronski tinha observado na sua Philosophia das Mathematicas, na sua Technia da Algorithmia, e na sua Refutação da Theoría das Funções Analyticas de Mr. de La Grange, que toda a Função de huma só variavel x se póde desenvolver d'esta fórma:

$$F x = A_0 + A_1 \varphi x + A_2 \varphi x^{2|\xi} + A_3 \varphi x^{3|\xi} + A_4 \varphi x^{4|\xi} + \text{\&c.}$$

sendo φx huma função qualquer de x tomada para medida a'gorithmica de Fx: tinha indicado a fórma dos coeficientes A_0; A_1; A_2; &c. asseverando ser

$$A_0 = F x$$

$$A_1 = \frac{1}{\Delta \varphi x} \Delta F x$$

$$A_2 = \frac{1}{\Delta^2 \varphi x .^{2|\xi}} \left(\Delta^2 F x - \Delta F x \frac{\Delta^2 \varphi x}{\Delta \varphi x} \right)$$

&c.

substituindo nestas expressões em logar de x o seu valor particular, que rezulta da suposição de $\varphi x = 0$; e era d'esta fórmula assim considerada que o Instituto de Pariz mostrava desejar a demonstração.

Se alguem á vista da mesma formula, e das mencionadas nossões dadas por Wronski, pertendendo descobrir a demonstração de todas as proposições, que nellas se encerrão, discorresse assim: pois que A_0 he a expressão de Fx quando nesta Função se substitue em logar de x o seu valor particular tirado da equação $\varphi x = 0$, se eu representar este valor por α será $A_0 = F\alpha$, e por tanto

$$\frac{Fx - F\alpha}{\varphi x} = A_1 + A_2\varphi(x+\xi) + A_3\varphi(x+\xi)^{2|\xi} + A_4\varphi(x+\xi)^{3|\xi} + \&c.$$

mas $\frac{Fx - F\alpha}{\varphi x}$ he huma função de x que eu posso representar por $F'x$; e então pois que o segundo membro da equação precedente indica o desenvolvimento d'esta função, eu posso por analogia concluir que he $A_1 = F'x$, substituindo-se nesta função em logar de x o seu valor particular tirado da equação

$$\varphi(x+\xi) = 0$$

E representando este valor por β terei $A_1 = F'\beta$ e

$$\frac{F'x - F'\beta}{\varphi' x} = A_2 + A_3\varphi(x+2\xi) + A_4\varphi(x+2\xi)^{2|\xi} + A_5\varphi(x+2\xi)^{3|\xi} + \&c.$$

donde concluirei semelhantemente que representando por γ o valor de x tirado da equação

$$\varphi(x+2\xi) = 0$$

e por $F''x$ o valor da função indicada pelo primeiro membro da equação precedente, será $A_2 = F''\gamma$; e assim por diante

Porém Wronski diz que esta sua formula he hum caso particular de outra mais geral, em a qual se não contempla se os incrementos de x são iguaes, ou desiguaes, nem qual seja a lei que elles guardão na sua successão; e por tanto se eu em vez de $\varphi(x+\xi)$; $\varphi(x+2\xi)$; $\varphi(x+3\xi)$; &c. escrever $\varphi'x$; $\varphi''x$; $\varphi'''x$; &c. terei, que será

$$Fx = F\alpha + \varphi x F'\beta + \varphi x.\varphi' x F''\gamma + \varphi x.\varphi' x.\varphi'' x F'''\delta + \&c.$$

sendo α; β; γ; δ; &c. os valores que rezultão para x das equações $\varphi x = 0$; $\varphi' x = 0$; $\varphi'' x = 0$; &c; e por tanto ainda que eu ignore qual foi o modo porque Wronski chegou ao conhecimento da formula geral, de que derivou a de que eu me servi para vir no conhecimento d'esta, com tudo

tenho huma formula igualmente geral, e da qual a que procede segundo as faculdades progressivas de x se deduz por méras substituições. Logo se eu disser, sejão respectivamente

$$x = \alpha \text{ - - - - } x = \beta \text{ - - - - } x = \gamma \text{ - - - - } x = \delta \text{ - - - } \&c.$$

sendo

$$\varphi x = 0 \text{ - - - } \varphi' x = 0 \text{ - - - } \varphi'' x = 0 \text{ - - - } \varphi''' x = 0 \text{ - - - } \&c.$$

escrevão-se ordenadamente as equações

$$F x = F \alpha + \varphi x . F' x$$
$$F' x = F' \beta + \varphi' x F'' x$$
$$F'' x = F'' \gamma + \varphi'' x F''' x$$
$$F''' x = F''' \delta + \varphi''' x F^{IV} x$$
$$\&c.$$

multipliquem-se tambem ordenadamente por 1 ; .. φx ; .. $\varphi x . \varphi' x$; .. $\varphi x . \varphi' x . \varphi'' x$; &c. e sommem-se os productos rezultantes d'estas multiplicações : d'esta somma rezultará

$$F x = F \alpha + \varphi x F' \beta + \varphi x . \varphi' x F'' \gamma + \varphi x . \varphi' x . \varphi'' x F''' \delta + \&c.$$

terei demonstrado a formula generalissima do Geometra Polaco, ou pelo menos outra igualmente generica, e da qual por méras substituições se deriva a que elle publicou, ordenada segundo as faculdades progressivas de huma qualquer função de x: se alguem tornou a dizer discorrendo assim, e occultando os passos, que o conduzião ás suposições, ou postulados acima mencionados, produzisse o resto do seu discurso como huma demonstração da formula generalissima, que deixo indicada, teria com efeito demonstrado essa formula?... Se o discurso todo em vez de constituir huma demonstração, não passa de ser huma simples transformação da formula de Wronski, metade d'elle será por ventura bastante para merecer o nome que o todo não merece?.... Não nego que haja algum mérito em derivar da formula particular de Wronski a formula geral do desenvolvimento das Funções em Series; mas presupondo esta a verdade d'aquella nem a demonstra; nem involve em si a sua propria demonstração.

Eu não me atrevo com tudo a dizer que foi por estes passos, que Mr. Servois conseguio sahir a limpo com a formula geral do desenvolvimento das Funções em Series: mostro que podia ser por elles; e como a sua pertendida demonstração se reduz precisamente á ultima parte d'este discurso; concluo que ella não he huma rigorosa demonstração.

Se Mr. Servois não tivesse nossão alguma anticipada da fórma da Serie representativa do desenvolvimento geral das Funções, começaria elle acaso a sua demonstração em fórma de advinhação, dizendo, seja φx;

$\varphi' x$; $\varphi'' x$; $\varphi''' x$; &c. huma Serie indifinida de funções de x, e sejão α; β; γ; δ; &c. as raizes respectivas das equações

$$\varphi x = 0; \text{ - - - - } \varphi' x = 0; \text{ - - - - } \varphi'' x = 0; \text{ - - - - } \varphi''' x = 0; \text{ - - - - } \mathcal{C}c.$$

Se elle não antevisse que o desenvolvimento geral das funções tinha dependencia d'esta suposição ou postulado certamente não começava por elle. Mas donde lhe veio este conhecimento?... Como o precisou M. Servois, e não precisão d'elle os seus Leitores?... A connexão entre huma tal suposição ou postulado, e o rezultado que d'ella se pertende derivar não he certamente de simples intuição.

Tambem me não parece mais legitimo o segundo postulado, seja

$$F x = F \alpha + \varphi x F' x$$
$$F' x = F' \beta + \varphi' x F'' x$$
$$F'' x = F'' \gamma + \varphi'' x F''' x$$
&c.

Como reconheceo Mr. Servois, que huma vez que na Função proposta Fx substituisse em logar de x o seu valor tirado da equação $\varphi x = 0$; devia ser Fx equivalente ao rezultado d'esta substituição mais ou menos hum producto em o qual φx deve ser factor?... Na investigação da fórma mais geral do desenvolvimento das Funções não deve entrar nada de arbitrario, que possa limitar a sua generalidade. He verdade que Mr. Servois emenda em certo modo esta falta, dizendo » eu faço estas equações » identicas supondo

$$F' x = \frac{F x - F \alpha}{\varphi x}$$

$$F'' x = \frac{F' x - F' \beta}{\varphi' x}$$

&c.

pois que na verdade parece, que não ha axioma algum mais evidente do que estes: » Toda a grandeza he igual a si mesma. » Toda a expressão » he equivalente a si mesma. » Entre tanto se Mr. Servois tivesse escrito arbitrariamente

$$\left.\begin{array}{l} F x = \text{Log. } F \alpha + \alpha^{\varphi x} F' x \\ F' x = \text{Log. } F' \beta + \beta^{\varphi x} F'' x \\ \text{\&c.} \end{array}\right\} B$$

persuadir-se-hia elle que para justificar esta hypothese ou postulado bastaria dizer » eu faço estas equações identicas supondo

$$F'x = \frac{Fx - \text{Log. } F\alpha}{\varphi x}_{\alpha}$$

$$F''x = \frac{F'x - \text{Log } F'\beta}{\varphi' x}_{\beta}$$

&c. ?

E se perguntassem por que razão preferio elle esta segunda hypothese á primeira, qual seria a sua resposta?... Eu não me atrevo a antevê-la: mas sei que não he este o estilo pelo qual Archimedes e Apolonio procedião em suas demonstrações; nem tão pouco o que em tempos mais visinhos a nós seguírão Newton e Maclaurin; e que ha muito lamento o estilo Sibylino que em damno da Sciencia se tem introduzido nos escritos da maior parte dos Geometras do presente e ainda do passado Seculo.

Se adoptando este novo estilo eu continuasse dizendo » multipliques-se ordenadamente a Serie de equações B por 1; $\overset{\varphi x}{\alpha}$; $\overset{\varphi x}{\alpha.}$ $\overset{\varphi x}{\beta.}$; $\overset{\varphi x}{\alpha.}$ $\overset{\varphi' x}{\beta.}$ $\overset{\varphi'' x}{\gamma}$; &c. Sommem-se estes productos, e feitas as reducções convenientes se terá

$$Fx = \text{Log. } F\alpha + \overset{\varphi x}{\alpha} \text{ Log. } F'\beta + \overset{\varphi x}{\alpha.}\ \overset{\varphi' x}{\beta.} \text{ Log. } F''\gamma + \&c.$$

teria eu acaso legitima razão para concluir, que he esta a fórma mais geral do desenvolvimento de Fx em Serie?

Como quer que seja; a solução que eu dei no principio d'esta Secção do Problema unico, a que reduzi o Methodo inverso dos Limites, he de bem diverso caracter: ella não depende senão dos tres seguintes principios, que expuz na minha Theorica dos Limites.

1.° » Toda a quantidade variavel capaz de Limite he igual ao seu » limite mais ou menos huma quantidade variavel sem limite em dimi- » nuição. »

2.° » Todo o producto de dois factores dos quaes hum he constan- » te ou capaz de limite, e o outro sem limite em diminuição, não tem » limite em diminuição. »

3.° » O Limite de qualquer Função de huma quantidade variavel ca- » paz de limite he igual á Função homologa do seu Limite. »

Estes principios me autorisárão a representar $F(x+u)$ por $Fx + V'F'(x,u)$ indicando x o estado primitivo da raiz da função Fx, u hum incremento qualquer d'essa raiz, e $x+u$ hum qualquer dos seus estados variados, sendo além d'isso V huma função de u sem limite em diminuição, e $F'(x,u)$ huma função de x e u constante ou capaz de Limite. O segundo princi-

pio me autorisou especialmente para representar V por $u\,\varphi\,u$ sendo $\varphi\,u$ huma função de u constante ou capaz de Limite, e d'aqui procede que eu concluo com a ultima evidencia, sem a adopção de hypotheses arbitrarias, nem dependencia do conhecimento das raizes de equação alguma, que he

$$F(x+u) = F\,x + u\,\varphi\,u\,F'x + u^2\,\varphi\,u.\,\varphi'u\,F''x + u^3\,\varphi\,u.\,\varphi'u.\,\varphi''u\,F'''x + \&c.$$

ou

$$F(x+u) = F\,u + x\,\varphi\,x\,F'u + x.^2\,\varphi\,x.\,\varphi'x\,F''u + x.^3\,\varphi\,x.\,\varphi'x.\,\varphi''x.\,F'''u + \&c.$$

formulas que não podem ser excedidas em generalidade, e que são perfeitamente consentaneas com os principios admitidos pelos mais austeros Geometras: que são d'elles deduzidas segundo as regras mais seguras da arte de raciocinar, e que sendo independentes dos principios de Systhema algum de Philosophia especulativa, são adoptaveis por todos os Geometras quaesquer que sejão as suas opiniões philosophicas sobre as faculdades intelectuaes, e suas especiaes funções.

He por estes motivos (eu o repito segunda vez) que depois de haver lido a Memoria de Mr. Servois não rompi o que sobre esta materia havia escrito.

Seja-me licito acrescentar aqui que Mr. Servois reconhece, que as formulas para a determinação dos coeficientes $F'\beta$; $F''\gamma$; $F'''\delta$; &c. são em alguns casos sujeitas a graves inconvenientes, e que para evita-los procurou dar novas fórmas ao desenvolvimento das Funções binominaes, sendo o meio mais simples que para isso poude descobrir o de suppôr gratuitamente

$$F(x+y) = F\,x + y\,f\,y$$

sendo sómente y considerando como variavel. D'esta suposição deduz com efeito Mr. Servois diversas fórmas do desenvolvimento de $F(x+y)$ na verdade elegantes e curiosas; mas que talvez não tem a generalidade, que elle parece suppôr-lhes.

Aos Geometras toca decidir se a suposição de

$$F(x+y) = F\,x + y\,f\,y$$

he sempre admissivel, ou se sofre alguma restrição proveniente da fórma ou indole da Função representada por F. Quanto a mim ella não póde ter logar senão em dois casos: o primeiro quando a indole de $F(x+y)$ for tal que a equação $F(x+y) = F\,x + y\,f\,y$ exprima não a equivalencia mas sim a identidade dos seus dois membros; e o segundo quando a relação entre x, e y for dada por huma equação da qual se deduza o valor de x

expresso em função de y. Ora o desenvolvimento de huma função, sempre que o número dos termos da Serie que o exprime he illimitado, não he identico com a função de que elle rezulta: a função he em tal caso o Limite de expressão da somma dos termos da Serie; e por tanto persuadome que o remedio proposto por Mr. Servois he, igualmente falando, ineficaz; e que são precarias as consequencias que d'elle se deduzem, se se considerão na maxima generalidade. Isto he o que me parece pelo que respeita ao primeiro caso: mas pelo que respeita ao segundo he visivel que elle exclue a independencia entre x, e y; e até mesmo a dependencia quando ella não he indicada por huma Equação.

Rio de Janeiro 6 de Março de 1819.

STOCKLER.

SECÇÃO II.

Do desenvolvimento das Funções multiplices ou das Funções de Funções.

§. 1.º

CHamo Funções multiplices aquellas expressões algorithmicas, cuja raiz em todo, ou em parte, he afecta de mais de hum algorithmo funcional: taes são por exemplo as expressões $\varphi f x$; $\varphi(x f x)$; $\varphi(a + f x)$; &c.

§. 2.º

Representando por $\varphi f x$ huma função dupla qualquer de x, e supondo

$$F x = \varphi f x$$

nos poderiamos por meio das convenientes substituições na formula primeira do §. 8.º da Secção I. deduzir immediatamente a expressão do desenvolvimento de $\varphi f x$: mas como o desenvolvimento indicado naquella formula presupoem que $F.$, ou $\varphi f.$ seja huma função possivel, ou huma expressão calculavel, e aconteça que ella algumas vezes não seja mais do que hum simbolo algorithmico, ou huma expressão algebrica á qual no meu conceito não póde corresponder idéa ou concepção intelectual racionavel de genero algum de grandeza, forçoso he que comecemos pelo desenvolvimento das funções binominaes duplas, do qual poderemos independentemente do conhecimento da grandeza representada pela Função proposta no caso de $x = 0$ derivar os meios de desenvolver as funções que esta suposição tornaria absurdas. Seja pois $\varphi f(x + u)$ huma função qualquer dupla do binomio $x + u$, e suponhamos

$$F(x + u) = \varphi f(x + u)$$

será $Fu = \varphi f u$; $\frac{dFu}{du} = \frac{d\varphi fu}{du}$; $\frac{d^2 Fu}{du^2} = \frac{d^2 \varphi fu}{du^2}$; &c. e por tanto substituindo nas formulas do §. 6.º da Secção I. teremos.

$$\varphi f(x+u) = \varphi f u + x\,\frac{d\varphi f u}{d u} + \frac{x^2}{1.2}\,\frac{d^2\varphi f u}{d u^2} + \frac{x^3}{1.2.3}\,\frac{d^3\varphi f u}{d u^3} + \&c.$$

$$\varphi f(x+u) = \varphi f x + u\,\frac{d\varphi f x}{d x} + \frac{u^2}{1.2}\,\frac{d^2\varphi f x}{d x^2} + \frac{u^3}{1.2.3}\,\frac{d^3\varphi f x}{d x^3} + \&c.$$

Supondo porém que seja $\frac{d\varphi f u}{d f u} = \varphi' f u$; $\frac{d\varphi' f u}{d f u} = \varphi'' f u$; $\frac{d\varphi'' f u}{d f u} = \varphi''' f u$;

e assim successivamente será

$$d\ \varphi f u = \varphi' f u . d f u$$

$$d^2 \varphi f u = \varphi'' f u (d f u)^2 + \varphi' f u . d^2 f u$$

$$d^3 \varphi f u = \varphi''' f u (d f u)^3 + 3\,\varphi'' f u . d f u . d^2 f u + \varphi' f u\, d^3 f u$$

$$d^4 \varphi f u = \varphi^{IV} f u (d f u)^4 + 6\,\varphi''' f u (d f u)^2 d^2 f u + \varphi'' f u \left(4 d f u\, d^3 f u + 3 (d^2 f u)^2\right) + \varphi' f u\, d^4 f u$$

$$d^5 \varphi f u = \varphi^{V} f u (d f u)^5 + 10\,\varphi^{IV} f u . (d f u)^3 d^2 f u + \varphi''' f u \left(10 (d f u)^2 d^3 f u + 15 . d f u . (d^2 f u)^2\right)$$
$$+ \varphi'' f u \left(5 d f u . d^4 f u + 10\, d^2 f u . d^3 f u\right) + \varphi' f u . d^5 f u .$$

$$d^6 \varphi f u = \varphi^{VI} f u (d f u)^6 + 15 . \varphi^{V} f u (d f u)^4 d^2 f u + \varphi^{IV} f u \left(20 (d f u)^3 d^3 f u + 45 (d f u)^2 (d^2 f u)^2\right)$$
$$+ \varphi''' f u \left(15 (d f u)^2 d^4 f u + 60 d f u . d^2 f u . d^3 f u + 15 (d^2 f u)^3\right) + \varphi'' f u \left(6 d f u\, d^5 f u\right.$$
$$\left. + 15\, d^2 f u\, d^4 f u + 10 (d^3 f u)^2\right) + \varphi' f u\, d^6 f u .$$

&c.

valores que substituidos no primeiro dos dois desenvolmentos aqui indicados de $\varphi f(x+u)$ e supondo $du = 1$ dão

$$\varphi f(x+u) = \varphi f u + x\,\varphi' f u . d f u$$
$$+ \frac{x^2}{1.2}\left(\varphi'' f u (d f u)^2 + \varphi' f u\, d^2 f u\right)$$
$$+ \frac{x^3}{1.2.3}\left(\varphi''' f u . (d f u)^3 + 3\,\varphi'' f u\, d f u . d^2 f u + \varphi' f u\, d^3 f u\right)$$
$$+ \frac{x^4}{1.(..)4}\left(\varphi^{IV} f u (d f u)^4 + 6\,\varphi''' f u (d f u)^2 d^2 f u + \varphi'' f u \left(4 d f u . d^3 f u + 3 (d^2 f u)^2\right)\right.$$
$$\left. + \varphi' f u . d^4 f u .\right)$$
$$+ \frac{x^5}{1.(..)5}\left(\varphi^{V} f u (d f u)^5 + 10\,\varphi^{IV} f u (d f u)^3 d^2 f u + \varphi''' f u \left(10 (d f u)^2 d^3 f u + 15\, d f u (d^2 f u)^2\right)\right.$$
$$\left. + \varphi'' f u \left(5 d f u . d^4 f u + 10 d^2 f u . d^3 f u\right) + \varphi' f u . d^5 f u .\right)$$
$$+ \&c.$$

formula que seguindo as regras da fluxionação a fim de determinar os coeficientes das diversas potencias de x se póde continuar por quantos termos se quizer, e que para de algum modo fazer sensivel aos olhos do Leitor

a lei da formação dos seus termos, podemos indicar da maneira seguinte; servindo-nos para maior simplicidade das notações de Kramp quanto ás faculdades progressivas e regressivas.

$$\varphi f(x+u) = \varphi fu + x\,\varphi' fu\, dfu$$

$$+ \frac{x^2}{1^{2|1}}\left(\varphi'' fu\,(dfu)^2 + 2^{2|-1}\,\varphi' fu\, d^2 fu\right)$$

$$+ \frac{x^3}{1^{3|1}}\left(\varphi''' fu\,(dfu)^3 + \frac{3^{2|-1}}{1^{2|1}}\,\varphi'' fu\, dfu.\, d^2 fu + \frac{3^{3|-1}}{1^{3|1}}\,\varphi' fu\, d^3 fu\right)$$

$$+ \frac{x^4}{1^{4|1}}\left(\varphi^{IV} fu\,(dfu)^4 + \frac{4^{2|-1}}{1^{2|1}}\,\varphi''' fu\,(dfu)^2\, d^2 fu + \varphi'' fu\left(\frac{4^{3|-1}}{1^{3|1}}\, dfu\, d^3 fu\right.\right.$$

$$\left.\left. + 3\,\frac{4^{4|-1}}{1^{4|1}}\,(d^2 fu)^2\right) + \frac{4^{4|-1}}{1^{4|1}}\,\varphi' fu\, d^4 fu.\right)$$

$$+ \frac{x^5}{1^{5|1}}\left(\varphi^{V} fu\,(dfu)^5 + \frac{5^{2|-1}}{1^{2|1}}\,\varphi^{IV} fu\,(dfu)^3\, d^2 fu + \varphi''' fu\left(\frac{5^{3|-1}}{1^{3|1}}\,(dfu)^2\, d^3 fu\right.\right.$$

$$\left. + 3\,\frac{5^{4|-1}}{1^{4|1}}\, dfu\,(d^2 fu)^2\right) + \varphi'' fu\left(\frac{5^{4|-1}}{1^{4|1}}\, dfu.\, d^4 fu + 2.5\,\frac{5^{5|-1}}{1^{5|1}}\, d^2 fu\, d^3 fu\right)$$

$$\left. + \frac{5^{5|-1}}{1^{5|1}}\,\varphi' fu.\, d^5 fu.\right)$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{x^n}{1^{n|1}}\left(\varphi^n fu\,(dfu)^n + \frac{n^{2|-1}}{1^{2|1}}\,\varphi^{(n-1)} fu\,(dfu)^{n-2}\, d^2 fu + \varphi^{(n-2)} fu\left(\frac{n^{3|-1}}{1^{3|1}}\,(dfu)^{n-3}\, d^3 fu\right.\right.$$

$$\left. + 3\,\frac{n^{4|-1}}{1^{4|1}}\,(dfu)^{n-4}\,(d^2 fu)^2\right) + \varphi^{(n-3)} fu\left(\frac{n^{4|-1}}{1^{4|1}}\,(dfu)^{n-4}\, d^4 fu + 2.5.\frac{n^{5|-1}}{1^{5|1}}\,(dfu)^{n-5}\, d^2 fu\, d^3 fu\right.$$

$$\left. + 3.5.\frac{n^{6|-1}}{1^{6|1}}\,(dfu)^{n-6}\,(d^2 fu)^3\right) + \varphi^{(n-4)} fu\left(\frac{n^{5|-1}}{1^{5|1}}\,(dfu)^{n-5}\,(d^5 fu) + 2.5.\frac{n^{6|-1}}{1^{6|1}}\,(dfu)^{n-6}\,(d^3 fu)^2\right.$$

$$+ 3.5.\frac{n^{6|-1}}{1^{6|1}}\,(dfu)^{n-6}\, d^2 fu.\, d^4 fu. + 3.5.7\,\frac{n^{7|-1}}{1^{7|1}}\,(dfu)^{n-7}\,(d^2 fu)^2\, d^3 fu +$$

$$\left. 3.5.7.\frac{n^{8|-1}}{1^{8|1}}\,(dfu)^{n-8}\,(d^2 fu)^4\right) + \cdots\cdots + \left.\frac{n^{n|-1}}{1^{n|1}}\,\varphi fu\, d^n fu.\right)$$

$+$ &c.

§. 3.º

Não devo com tudo dissimular que assim mesmo a lei indicada no termo geral d'esta formula he nimiamente composta, e até impossivel de explicar-se completamente em palavras, nem mesmo em indicações algorithmicas, que fação a sua aplicação mais facil do que a lei geral da fluxionação. Entre tanto esta sim nos dá a facilidade de formar successivamente tantos termos do desenvolvimento de $\varphi f(x+u)$ quantos quizermos; porém não nos indica os meios de formarmos hum termo qualquer independentemente do conhecimento do que o antecede, e por isso he indispensavel, que eu aqui indique de algum modo a lei geral da formação de cada termo, ou, o que he o mesmo, a lei da formação do termo geral.

Para este efeito cumpre observar. 1.º Que em qualquer termo $n+1$ do desenvolvimento de $\varphi f(x+u)$ o coeficiente de $\frac{x^n}{1.^{n}|^{1}}$ deve constar de hum número n de productos em que são separadamente factores $\varphi^{n}_{|} fu$; $\varphi^{(n-1)}_{|} fu$; $\varphi^{(n-2)}_{|} fu$; ..... $\varphi' fu$. 2.º Que só os productos em que são factores $\varphi^{n}_{|} fu$; $\varphi^{(n-1)}_{|} fu$; $\varphi' fu$ são monomios. 3.º Que em todos os termos de cada hum d'estes productos a somma que rezulta dos productos do indice fluxional de cada fluxão de fu, pelo expoente da sua potencia he constantemente $= n$. E 4º Que todas as fluxões de fu se achão no coeficiente de $\frac{x^n}{1.^{n}|^{1}}$ combinadas entre si por multiplicação de todos os modos possiveis para que as sommas dos productos dos seus indices fluxionaes pelos seus expoentes de potencia formem o número n.

Depois d'estas observações, para poder formar-se o termo geral do desenvolvimento de $\varphi f(x+u)$, sómente resta determinar de quantos termos devem constar os productos em que são factores $\varphi^{(n-2)}_{|} fu$; $\varphi^{(n-3)}_{|} fu$; ... $\varphi'' fu$, e qual he o coeficiente numerico de cada hum d'estes termos. Para vir no conhecimento d'estes dois artigos cumpre notar, que a somma dos productos dos indices fluxionaes de todas as fluxões

$$df u;\ d^2 f u;\ d^3 f u;\ d^4 f u;\ \ldots\ldots\ d^n f u$$

multiplicados pelos expoentes das diversas potencias, a que podem achar-se elevados desde a primeira até á potencia n, he precisamente igual ao número dos modos, pelos quaes o número n póde ser indicado arithme-

ticamente pela somma dos números inteiros inclusa a sua propria e natural indicação. O número 3, por exemplo, póde ser indicado por tres modos diferentes, a saber

$$1+1+1.$$
$$1+2$$
$$3.$$

e as fluxões dfu; d^2fu; d^3fu só podem dispor-se de maneira que a somma dos productos dos seus indices pelos expoentes das suas potencias seja $=3$ por outros tres modos, a saber $(dfu)^3$; $dfu.d^2fu$; e d^3fu.

O número 4 póde ser indicado por cinco modos diversos

$$1+1+1+1.$$
$$1+1+2$$
$$1+3.$$
$$2+2.$$
$$4.$$

assim como as fluxões dfu; d^2fu; d^3fu; e d^4fu só podem dispor-se de maneira que os productos dos seus indices fluxionaes pelos expoentes das suas potencias seja 4 pelos cinco modos seguintes

$$(dfu)^4;\ ..(dfu)^2d^2fu;\ ..dfu\,d^3fu;\ ..(d^2fu)^2;\ d^4fu.$$

A mesma correspondencia de combinações se observa entre os diversos modos de representar arithmeticamente por sommas outro qualquer número, e os modos de combinar por multiplicação as fluxões de indices não maiores do que esse número: de maneira que a somma dos productos dos indices pelos expoentes de potencia sejão iguaes a esse mesmo número: mas para maior clareza porei ainda aqui em confrontação os diversos modos da indicação arithmetica do número 5 com os diversos modos das combinações correspondentes das fluxões da primeira até á quinta ordem.

$1+1+1+1+1$ - - - - - - - - - $(dfu).^5$
$1+1+1+2$ - - - - - - - - - - - $(dfu).^3a^2fu$
$1+1+3$ - - - - - - - - - - - - - $(dfu)^2d^3fu$
$1+2+2$ - - - - - - - - - - - - - - - $dfu\,(d^2fu)^2$
$1+4$ - - - - - - - - - - - - - - - - $dfu.\ d^4fu$
$2+3$ - - - - - - - - - - - - - - - - $d^2fu.\ d^3fu$
$5.$ - - - - - - - - - - - - - - - - - - $d^5fu.$

D'aqui se segue 1.º que sendo

$$1+1+1+1+1+\&c=n.1$$

e não podendo o número n ser indicado pela somma de n numeros intei-

ros de outro algum modo, o primeiro termo do coeficiente de $\frac{x^n}{1.^{n|1}}$ no desenvolvimento de $\varphi f(x+u)$ será

$$\varphi^n f u\,(df u)^n.$$

2.° Que sendo

$$2+1+1+1+1+\&c. = 1.2+(n-2).1$$

o unico modo, pelo qual o mesmo número n póde ser representado pela somma de $(n-1)$ números inteiros, e sendo $\frac{n(n-1)}{1.2}$ o número dos diferentes modos pelos quaes de n quantidades se podem tirar duas de huma vez, o segundo termo do coeficiente de $\frac{x^n}{1.^{n|1}}$ será

$$-\frac{n.^{2|-1}}{1.^{2|1}}\,\varphi f u\,(df u)^{(n-1),}\,d^2 f u^{n-2}$$

3.° Que sendo

$$3+1+1+1+1+\&c. = 1.3.+(n-3).1$$
$$2+2+1+1+1+\&c. = 2.2+(n-4).1$$

os diversos modos pelos quaes o número n póde ser indicado pela somma $n-2$ números inteiros, o terceiro termo do coeficiente, de que se trata, será hum binomio

$$\varphi f u^{(n-2),}\left(A\,(df u)^{n-3}\,d^3 f u + B\,(df u)^{n-4}\,(d^2 f u)^2\right)$$

em o qual o coeficiente A denota o número dos modos diferentes pelos quaes de hum número n de quantidades se podem tirar trez de huma vez, e o coeficiente B o producto do número, que indica por quantos modos de n quantidades se podem tirar quatro de huma vez, multiplicado pelo número dos modos, pelos quaes as quatro quantidades separadas, sendo entre si multiplicadas duas a duas, podem ser distribuidas em factores diferentes, que inculquem o producto de todas quatro, e por tanto será

$$A = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} = \frac{n.^{3|-1}}{1.^{3|1}}$$

e

$$B = 3\,\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} = 3\,\frac{n.^{4|-1}}{1.^{4|1}}$$

donde rezulta que o terceiro termo do coeficiente buscado será

$$\varphi f u^{(n-2),}\left(\frac{n.^{3|-1}}{1.^{3|1}}\,(df u)^{n-3}\,d^3 f u + 3\,\frac{n.^{4|-1}}{1.^{4|1}}\,(df u)^{n-4}\,(d^2 f u).2\right)$$

4.° Que sendo

$$4+1+1+1+1+\&c. = 1.\,4. + (n-4).\,1$$
$$3+2+1+1+1+\&c. = 1.\,3 + 1.\,2\,(n-5).\,1$$
$$2+2+2+1+1+\&c. = 3.\,2 + (n-6).\,1$$

os diversos modos pelos quaes o número n póde ser indicado pela somma de $n-3$ números inteiros, o quarto termo do coeficiente de que se trata será hum trinomio

$$\varphi f u^{(n-3)/}\left(A(dfu)^{n-4}\,dfu + B.(dfu).^{n-5}\,d^2fu.\,d^3fu + C(dfu)^{n-6}\,(d^2fu).^3\right)$$

em o qual A representa o número dos modos diferentes pelos quaes de n quantidades se podem separar quatro de huma vez: B o producto do número dos modos pelos quaes de n quantidades se podem separar cinco, multiplicado pelo número dos modos pelos quaes o producto das cinco quantidades separadas se póde dividir em dois factores diferentes compostos hum de duas, outro de trez: e C finalmente o producto do número que denota por quantos modos diferentes de n quantidades se podem separar seis, multiplicado pelo número dos modos pelos quaes o producto das seis separadas se póde indicar por trez factores diferentes compostos cada hum de duas: donde se segue que o quarto termo do coeficiente de que se trata será

$$\varphi f u^{(n-3)/}\left(\frac{n.^{4|-1}}{1.^{4|1}}(dfu)^{n-4}\,d^4fu + 2.\,5.\frac{n.^{5|-1}}{1.^{5|1}}(dfu)^{n-5}\,d^2fu.\,d^3fu + 3.\,5.\frac{n^{6|-1}}{1.^{6|1}}(dfu)^{n-6}\,(d^2fu)^3\right)$$

e assim successivamente.

§. 4.°

Do que deixo dito se manifesta que suposto, seguindo a marcha indicada se possa formar qualquer termo do desenvolvimento de $\varphi f(x+u)$ independentemente do conhecimento dos termos antecedentes, com tudo o seguimento d'ella exige tanta atenção, e tanta presença dos rezultados da Theoría das combinações, pelo menos desde o oitavo ou nono termo em diante, que talvez seja mais seguro e mais expedito formar successivamente todos os termos até ao que se pertende seguindo simplesmente a lei da fluxionação. Porém como seja tanto mais facil cometer hum erro em qualquer Cálculo quanto maior he o número das operações de que depende o seu rezultado, e quanto estas são mais complicadas, indicarei hum meio seguro de examinar depois de formado hum termo qualquer, se na sua formação houve ou não erro, sendo certo não o ter havido na formação do seu antecedente; seja por exemplo o termo quinto

$\frac{x^4}{1.2.3.4}\left(\varphi^{IV}fu\,(dfu)^4 + 6\,\varphi'''fu\,(dfu)^2\,d^2fu + \varphi''fu\,(4\,dfu.\,d^3fu + 3\,(d^2fu)^2) + \varphi'fu.\,d^4fu\right)$

para verificar a exactidão do multiplicador de $\frac{x^4}{1.2.3.4}$: diminuasse hum assento a $\varphi^{IV}fu$, e huma unidade ao expoente de dfu no primeiro termo do dito multiplicador, e se terá $\varphi'''fu\,(dfu)^3$: fluxionesse esta expressão relativamente a dfu e se terá $3\,\varphi'''fu\,(dfu)^2\,d^2fu$: tiresse esta expressão fluxional do segundo termo do dito multiplicador, e ficará o resto $3\,\varphi'''fu\,(dfu)^2\,d^2fu$: diminuasse hum assento a $\varphi'''fu$, e huma unidade ao expoente de dfu, e se terá $3\,\varphi''fu.\,dfu.\,d^2fu$: fluxionesse esta expressão relativamente ás fluxões de fu, e se terá $3\,\varphi''fu\,(dfu.\,d^3fu. + (d^2fu)^2)$: subtraiha-se do terceiro termo e ficará o resto $\varphi''fu\,dfu\,d^3fu$: diminuasse hum assento a $\varphi''fu$ e huma unidade ao expoente de dfu, e se terá $\varphi'fu\,d^3fu$: fluxionesse esta expressão relativamente a d^3fu, e o rezultado $\varphi'fu.\,d^4fu$ sendo subtrahido do quarto termo, e não deixando resto algum nos verifica a exactidão do multiplicador que tinhamos em prova.

§. 5.°

Esta mesma operação serve para reverter de hum termo dado do desenvolvimento de huma função binomial dupla para o seu antecedente por quanto he evidente que reunindo os rezultados de todas as operações, em que se diminuirão assentos ao algorithmo funcional φ, e unidades aos expoentes dfu se tem

$$\varphi'''fu\,d^3fu + 3\,\varphi''fu.\,dfu.\,d^2fu + \varphi'fu.\,d^3fu$$

expressão que sendo multiplicada por $\frac{x^3}{1.2.3}$ dá o quarto termo do desenvolvimento de $\varphi f(x+u)$. Operando sobre este pelo mesmo estilo se teria o terceiro: e assim successivamente.

§. 6.°

De qualquer modo que se obtenha o desenvolvimento de $\varphi f(x+u)$ he sempre evidente que a suposição de $u=0$, converte $\varphi f(x+u)$ em φfx, e fu em $f.$; e que por tanto será sempre

$$\varphi fx = \varphi f. + x\,\varphi' f.\,df. + \frac{x^2}{1.2}\left(\varphi''f.\,(df)^2 + \varphi' f.\,d^2f.\right)$$

$$+\frac{x^3}{1.^{3|1}}\left(\varphi'''f.(df.)^3+3\varphi''f.df.d^2f.+\varphi'f.d^3f.\right)$$

$$+\frac{x^4}{1.^{4|1}}\left(\varphi^{IV}f.(df.)^4+6\varphi'''f.(df.)^2d^2f.+\varphi''f.\left(4df.d^3f.+3(d^2f.)^2\right)+\varphi'f.d^4f.\right)$$

$$+\text{ \&c.}$$

§. 7.°

D'aqui se segue que se $x=0$ fizer $f.=1$ será

$$\varphi fx=\varphi 1+\frac{x}{1}df.\varphi'1$$

$$+\frac{x^2}{1.^{2|1}}\left(\varphi''1(df.)^2+\varphi'1d^2f.\right)$$

$$+\frac{x^3}{1.^{3|1}}\left(\varphi'''1(df.)^3+3\varphi''1.df.d^2f.+\varphi'1d^3f.\right)$$

$$+\frac{x^4}{1.^{4|1}}\left(\varphi^{IV}1(df.)^4+6\varphi'''1(df.)^2d^2f.+\varphi''1\left(4df.d^3f.+3(d^2f.)^2\right)+\varphi'1d^4f.\right)$$

$$+\text{ \&c.}$$

§. 8.°

Se supozermos $x=z-u$, o desenvolvimento geral de $\varphi f(x+u)$ exposto em o §. 2.° se converterá em

$$\varphi fz=\varphi fu+(z-u)\varphi'fu.dfu$$

$$+\frac{(z-u)^2}{1.^{2|1}}\left(\varphi''fu(dfu)^2+\varphi'fu.d^2fu\right)$$

$$+\frac{(z-u)^3}{1.^{3|1}}\left(\varphi'''fu(dfu)^3+3\varphi''fu.dfu.d^2fu+\varphi'fu.d^3fu\right)$$

$$+\frac{(z-u)^4}{1.^{4|1}}\left(\varphi^{IV}fu(dfu)^4+6\varphi'''fu(dfu)^2d^2fu+\varphi''fu\left(4dfu.d^3fu+3(d^2fu)^2\right)+\varphi'fu\,d^4fu\right)$$

$$+\text{ \&c.}$$

§. 9.°

Se $u=k$ fizer

$$fk=0$$

a formula antecedente se converterá em

$$\varphi f z = \varphi. + (z - k)\,\varphi'.\,df k$$
$$+ \frac{(z-k)^2}{1.2|1}\left(\varphi.''\,(df k)^2 + \varphi.'\,d^2 f k\right)$$
$$+ \frac{(z-k)^3}{1.3|1}\left(\varphi.'''\,(df k)^3 + 3\,\varphi.''\,df k.\,d^2 f k. + \varphi.'\,d^3 f k\right)$$
$$+ \frac{(z-k)^4}{1.4|1}\left(\varphi.^{IV}\,(df k)^4 + 6\,\varphi.'''\,(df k)^2\,d^2 f k + \varphi.''\left(4\,df k.\,d^3 f k + 3\,(d^2 f k)^2\right) + \varphi.'\,d^4 f k\right)$$
$$+ \&c.$$

e se $u = k$ fizer

$$f k = 1$$

então $\varphi f u$ se converterá em $\varphi\,1$, e a formula se exprimirá da maneira seguinte

$$\varphi f z = \varphi\,1. + (z-k)\,\varphi'1.\,df k$$
$$+ \frac{(z-k)^2}{1.2|1}\left(\varphi''\,1\,(df k)^2 + \varphi'1.\,d^2 f k\right)$$
$$+ \frac{(z-k)^3}{1.3|1}\left(\varphi'''\,1\,(df k)^3 + 3\,\varphi''\,1\,df k.\,d^2 f k + \varphi'\,1\,d^3 f k\right)$$
$$+ \frac{(z-k)^4}{1.4|1}\left(\varphi^{IV}\,1\,(df k)^4 + 6\,\varphi'''\,1\,(df k)^2\,d^2 f k + \varphi''\,1\left(4\,df k.\,d^3 f k + 3\,(d^2 f k)^2\right) + \varphi'1\,d^4 f k\right)$$
$$+ \&c.$$

§. 10.°

Se o algorithmo funcional φ denotar Logarithmo hyperbolico será

$$\varphi f x = \text{Log.}\,f x$$

e a formula do §. 6.° nos dará

$$\text{Log.}\,f x = \text{Log.}\,f. + \frac{x}{1}\frac{df.}{f.}$$
$$- \frac{x^2}{2}\left(\frac{(df.)^2}{f.^2} - \frac{d^2 f.}{f.}\right)$$
$$+ \frac{x^3}{3}\left(\frac{(df.)^3}{f.^3} - \frac{3}{2}\frac{df.\,d^2 f.}{f.^2} + \frac{1}{2}\frac{d^3 f.}{f.}\right)$$
$$- \frac{x^4}{4}\left(\frac{(df.)^4}{f.^4} - 2\,\frac{(df.)^2\,d^2 f.}{f.^3} + \frac{\frac{2}{3}\,df.\,d^3 f. + \frac{1}{2}\,(d^2 f.)^2}{f.^2} - \frac{1}{6}\frac{d^4 f.}{f.}\right)$$
$$+ \&c.$$

formula que só não póde ter logar quando for $f. = 0$

§. 11.°

Sendo $fx = e^x$ será $\varphi fx = \varphi e^x$; mas he $d(e^x) = e^x$; $d^2(e^x) = e^x$; &c.

e como $x = 0$ faz $e^{x} = 1$; a formula do §. 7.º nos dá

$$\varphi e^{x} = \varphi 1 + \frac{x}{1}\varphi' 1 + \frac{x^2}{1.2|1}\left(\varphi'' 1 + \varphi' 1\right) + \frac{x^3}{1.3|1}\left(\varphi''' 1 + 3\varphi'' 1 + \varphi' 1\right) + \frac{x^4}{1.4|1}\left(\varphi^{IV} 1 + 6\varphi''' 1 + 7\varphi'' 1 + \varphi' 1\right) + \frac{x^5}{1.5|1}\left(\varphi^{V} 1 + 10\varphi^{IV} 1 + 25\varphi''' 1 + 15\varphi'' 1 + \varphi' 1\right) + \&c.$$

§. 12.º

Sendo $fx = \text{Log. } x$; será $\varphi fx = \varphi \text{Log. } x$; $dfx = \frac{1}{x}$; $d^2fx = -\frac{1}{x^2}$; $d^3fx = \frac{1.2}{x^3}$; $d^4fx = -\frac{1.2.3}{x^4}$; $d^5fx = \frac{1.2.3.4}{x^5}$; &c; mas pois que $x = 0$ faz Log. x impossivel ou infinito negativo na frase commum dos Geometras; e $x = 1$ faz Log. $x = 0$; supondo $x = 1$, a formula do §. 9.º nos dará

$$\varphi \text{Log. } x = \varphi. + (x-1)\varphi.' + \frac{(x-1)^2}{1.2|1}\left(\varphi.'' - \varphi.'\right) + \frac{(x-1)^3}{1.3|1}\left(\varphi.''' - 3\varphi.'' + 2\varphi.'\right) + \frac{(x-1)^4}{1.4|1}\left(\varphi.^{IV} - 6\varphi.''' + 11\varphi.'' - 6\varphi.'\right) + \frac{(x-1)^5}{1.5|1}\left(\varphi.^{V} - 10\varphi.^{IV} + 35\varphi.''' - 50\varphi.'' + 24\varphi.'\right) + \&c.$$

§. 13.º

Sendo $\varphi fx = e^{fx}$, será (§. 6.º)

$$e^{fx} = e^{f.}\left(1 + x\,df. + \frac{x^2}{1.2|1}\left((df.)^2 + d^2f.\right)\right.$$

$$+\frac{x^3}{1.3|1}\left((df.)^3+3\,df.\,d^2f.+d^3f.\right)$$

$$+\frac{x^4}{1.4|1}\left((df.)^4+6\,(df)^2\,d^2f.+4\,df.\,d^3f.+3\,(d^2f.)^2+d^4f.\right)$$

$$+\text{\&c.}$$

§. 14.°

Até aqui temos contemplado as funções duplas cuja variabilidade não depende de seus expoentes, e aquellas cuja variabilidade sómente d'estes depende: falta-nos para completar esta doutrina que indiquemos qual he o desenvolvimento geral das funções cuja variabilidade depende da variabilidade da sua raiz, e da variabilidade do seu expoente. Ellas se podem contemplar todas incluidas na expressão geral $(\varphi x)^{fx}$. cujo desenvolvimento gradual passo a expor para facilitar o conhecimento da sua fórma final. Seguindo a regra, que rezulta do desenvolvimento expressado em o §. 8.° da Secção I. teremos

$$(\varphi x.)^{fx}=\varphi.^{f.}+\frac{x}{1}d(\varphi.)^{f.}+\frac{x^2}{1.2}d^2(\varphi.)^{f.}+\frac{x^3}{1.2.3}d^3(\varphi.)^{f.}+\frac{x^4}{1.2.3.4}d^4(\varphi.)^{f.}+\&c.$$

mas este desenvolvimento assim indicado exige para sua completa desenvolução, que a $d(\varphi.)^{f.}$; $d^2(\varphi.)^{f.}$; &c. se substituão as particulares expressões, que lhes competem segundo as regras do Methodo directo das Fluxões: e bem que estas sejão assás sabidas; para facilitarmos o conhecimento da fórma do rezultado final suponhamos fx Log. $\varphi x=\Phi x$, será $f.$ Log. $\varphi.=\Phi.$; e $d(f.\text{Log. }\varphi.)=d\,\Phi.=\Phi'.$: mas he $d(\varphi.)^{f.}=\varphi.^{f.}\,d(f.\text{Log. }\varphi.)$; logo

$$d(\varphi.)^{f.}=\varphi.^{f.}\,\Phi.'$$

$$d^2(\varphi.)^{f.}=\varphi.^{f.}\left(\Phi.'^2+\Phi''\right)$$

$$d^3(\varphi.)^{f.}=\varphi.^{f.}\left(\Phi.'^3+3\,\Phi.'\Phi.''+\Phi.'''\right)$$

$$d^4(\varphi.)^{f.}=\varphi.^{f.}\left(\Phi.'^4+6\,\Phi.'^2\Phi.''+4\,\Phi.'\Phi.'''+3\,\Phi.''^2+\Phi.^{IV}\right)$$

$$d^5(\varphi.)^{f.}=\varphi.^{f.}\left(\Phi.'^5+10\,\Phi.'^3\Phi.''+15\,\Phi.'^2\Phi.''^2+5\,\Phi.'\Phi.^{IV}+10\,\Phi.''\Phi.'''+\Phi.^{V}\right)$$

&c.

valores que substituidos nos seus competentes logares reduzem o indicado desenvolvimento a

$$(\varphi x).^{fx} = \varphi.^{f.} \Big(1 + \frac{x.}{1} \Phi.' + \frac{x^2}{1.2|1} \Big(\Phi.'^2 + \Phi.'' \Big) + \frac{x^3}{1.3|1} \Big(\Phi.'^3 + 3\,\Phi.'\Phi.'' + \Phi.''' \Big) + \frac{x^4}{1.4|1} \Big(\Phi.'^4 + 6\,\Phi.'^2\Phi.'' + 4\,\Phi.'\Phi.''' + 3\,\Phi.''^2 + \Phi.^{IV} \Big) + \&c. \Big)$$

mas he

$$\Phi.' = d\ f.\mathrm{Log}.\varphi. + f.\frac{\varphi.'}{\varphi.}$$

$$\Phi.'' = d^2 f.\mathrm{Log}.\varphi. + 2\,df.\frac{\varphi.'}{\varphi.} - f.\Big(\frac{\varphi.'^2}{\varphi.^2} - \frac{\varphi.''}{\varphi.}\Big)$$

$$\Phi.''' = d^3 f.\mathrm{Log}.\varphi. + 3\,d^2 f.\frac{\varphi.'}{\varphi.} - 3\,df.\Big(\frac{\varphi.'^2}{\varphi.^2} - \frac{\varphi.''}{\varphi.}\Big) + 2f\Big(\frac{\varphi.'^3}{\varphi.^3} - \frac{3}{2}\frac{\varphi.'\varphi.''}{\varphi.^2} + \frac{1}{2}\frac{\varphi.'''}{\varphi.}\Big)$$

$$\Phi.^{IV} = d^4 f.\mathrm{Log}.\varphi. + 4\,d^3 f.\frac{\varphi.'}{\varphi.} - 6\,d^2 f.\Big(\frac{\varphi.'^2}{\varphi.^2} - \frac{\varphi.''}{\varphi.}\Big) + 3\,df\Big(\frac{\varphi.'^3}{\varphi.^3} - \frac{3}{2}\frac{\varphi.'\varphi.''}{\varphi.^2} + \frac{1}{2}\frac{\varphi.'''}{\varphi.}\Big) - 6f.\Big(\frac{\varphi.'^4}{\varphi.^4} - 2\frac{\varphi.'^2\varphi.''}{\varphi.^3} + \frac{2}{3}\Big(\frac{\varphi.'\varphi.''' + \frac{3}{4}\varphi.''^2}{\varphi.^2}\Big) - \frac{1}{4}\frac{\varphi.^{IV}}{\varphi.}\Big)$$

&c.

e por consequencia substituindo estes valores nos seus competentes logares se terá o desenvolvimento de $(\varphi x).^{fx}$, o qual por brevidade indicaremos da maneira seguinte

$$(\varphi x).^{fx} = \varphi.^{f.} \Big(1 + \frac{x}{1} d\,(f.\mathrm{Log}.\varphi.) + \frac{x^2}{1.2|1} \Big(\big(d\,(f.\mathrm{Log}.\varphi.)\big)^2 + d^2\,(f.\mathrm{Log}.\varphi.) \Big) + \frac{x^3}{1.3|1} \Big(\big(d\,(f.\mathrm{Log}.\varphi.)\big)^3 + 3\,d^2\,(f.\mathrm{Log}.\varphi).d(f.\mathrm{Log}.\varphi.) + d^3(f.\mathrm{Log}.\varphi.) \Big) + \frac{x^4}{1.4|1} \Big(\big(d\,(f.\mathrm{Log}.\varphi.)\big)^4 + 6\,d^2\,(f.\mathrm{Log}.\varphi).\big(d\,(f.\mathrm{Log}.\varphi.)\big)^2 + 4\,d^3\,(f.\mathrm{Log}.\varphi).d(f.\mathrm{Log}.\varphi.) + 3\,\big(d^2(f.\mathrm{Log}.\varphi)\big)^2 + d^4(f.\mathrm{Log}.\varphi.) \Big) + \&c. \Big)$$

§. 15.º

Se na formula citada do §. 8.º da Secção I. tivessemos considerado successivamente $Fx = \text{Sen. } x$; e $Fx = \text{Cos. } x$; advertindo que $x = 0$ faz Sen. $= 0$; d^{2n} Sen. $= 0$; d^{4n+1} Sen. $= 1$; d^{2n+1} Sen. $= -1$; Cos. $= 1$; d^{4n} Cos. $= 1$; d^{2n+1} Cos. $= 0$; e d^{4n+2} Cos. $= -1$ teriamos achado as expressões aliás conhecidas

$$\text{Sen. } x = x - \frac{x^3}{1.3|1} + \frac{x^5}{1.5|1} - \frac{x^7}{1.7|1} + \frac{x^9}{1.9|1} - \&c.$$

e

$$\text{Cos. } x = 1 - \frac{x^2}{1.2|1} + \frac{x^4}{1.4|1} - \frac{x^6}{1.6|1} + \frac{x^8}{1.8|1} - \&c.$$

§. 16.º

Para assignar a formula geral do desenvolvimento de huma função qualquer do Seno de hum angulo he preciso que, representando por $\frac{1}{4}\pi$ hum quadrante angular, ou hum angulo recto, comecemos por considerar os angulos agudos, e supondo por tanto $x < \frac{1}{4}\pi$, e $fx = \text{Sen. } x$, será φfx, $= \varphi$ Sen. x e como $x = 0$ faz $f. = 0$; $d^{2n} f. = 0$; $d^{4n+1} f. = 1$; e $d^{2n+1} f. = -1$; será $\varphi f. = \varphi.$; e por tanto fazendo as devidas substituições na formula do §. 6.º, se terá

$$\begin{aligned}\varphi \text{ Sen. } x = {} & \varphi. + \frac{x}{1}\varphi.' \\ & + \frac{x^2}{1.2|1}\varphi.'' \\ & + \frac{x^3}{1.3|1}\left(\varphi.''' - \varphi'\right) \\ & + \frac{x^4}{1.4|1}\left(\varphi.^{IV} - 4\varphi.''\right) \\ & + \frac{x^5}{1.5|1}\left(\varphi.^{V} - 10\varphi.''' + \varphi.'\right) \\ & + \frac{x^6}{1.6|1}\left(\varphi.^{VI} + 20\varphi.^{IV} + 16\varphi.''\right) \\ & + \&c.\end{aligned}$$

§. 17.º

Sendo $fx = \text{Cos. } x$, será $\varphi fx = \varphi$ Cos. x; e como Cos. $x = $ Sen. $(\frac{1}{4}\pi - x)$, teremos dois modos de desenvolver φ Cos. x; hum o que nos

indica a formula do §. 7.º o outro o que nos facilita a do §. antecedente. Querendo servir-nos da primeira devemos advertir que $x = 0$ faz Cos. x, ou $f. = 1$; $d^{2n+1} f. = 0$; $d^{4n} f. = 1$; $d^{4n+2} f. = -1$ e então fazendo as convenientes substituições acharemos.

$$\varphi.\,\text{Cos.}\,x = \varphi\,1 - \frac{x^2}{1.2|1}\,\varphi'\,1$$
$$+ \frac{x^4}{1.4|1}\left(3\,\varphi''\,1 + \varphi'\,1\right)$$
$$- \frac{x^6}{1.6|1}\left(15\,\varphi'''\,1 + 15\,\varphi''\,1 + \varphi'\,1\right)$$
$$+ \frac{x^8}{1.8|1}\left(105\,\varphi^{IV}\,1 + 210\,\varphi'''\,1 + 63\,\varphi''\,1 + \varphi'\,1\right)$$
$$- \&c.$$

Preferindo porém servir-nos da segunda formula basta substituir $\frac{1}{4}\pi - x$ em logar de x, advertindo que não he a suposição de $x = 0$ a que faz φ Cos. $x = \varphi$. mas sim a suposição de $x = \frac{1}{4}\pi$.

§. 18.º

Sendo $\varphi f x = \text{Sen.}\,f x$; $x = 0$ fará $\varphi f. = \text{Sen.}\,f.$; $\varphi' f. = \text{Cos.}\,f.$; $\varphi'' f. = -\text{Sen.}\,f.$; $\varphi''' f. = -\text{Cos.}\,f.$; $\varphi^{IV} f. = \text{Sen.}\,f.$; $\varphi^{V} f. = \text{Cos.}\,f.$; &c, e por tanto fazendo as substituições convenientes na formula do §. 6.º teremos

$$\text{Sen.}\,f x = \text{Sen.}\,f. + \frac{x}{1}\,df\,\text{Cos.}\,f.$$
$$- \frac{x^2}{1.2|1}\left((df.)^2\,\text{Sen.}\,f. - d^2 f.\,\text{Cos.}\,f.\right)$$
$$- \frac{x^3}{1.3|1}\left((df.)^3\,\text{Cos.}\,f. + 3\,df.\,d^2 f.\,\text{Sen.}\,f. - d^3 f.\,\text{Cos.}\,f.\right)$$
$$+ \frac{x^4}{1.4|1}\left((df.)^4\,\text{Sen.}\,f. - 6\,(df.)^2\,\text{Cos.}\,f. - \left(4\,df.\,d^3 f. + 3\,(d^2 f.)^2\right)\text{Sen.}\,f. + d^4 f.\,\text{Cos.}\,f.\right)$$
$$+ \&c.$$

§. 19.º

Sendo $\varphi f x = \text{Cos.}\,f x$; $x = 0$ fará $\varphi f. = \text{Cos.}\,f.$; $\varphi' f. = -\text{Sen.}\,f.$; $\varphi'' f. = -\text{Cos.}\,f.$; $\varphi''' f. = \text{Sen.}\,f.$; $\varphi^{IV} f. = \text{Cos.}\,f.$; &c., e por consequencia será

$$\text{Cos.}\, f\,x = \text{Cos.}\, f. - \frac{x}{1}\, df.\, \text{Sen.}\, f.$$

$$- \frac{x^2}{1.2|1}\left((df.)^2\, \text{Cos.}\, f. + d^2 f.\, \text{Sen.}\, f.\right)$$

$$+ \frac{x^3}{1.3|1}\left(df.)^3\, \text{Sen.}\, f. - 3\, df.\, d^2 f.\, \text{Cos.}\, f. - d^3 f.\, \text{Sen.}\, f.\right)$$

$$+ \frac{x^4}{1.4|1}\left((df.)^4\, \text{Cos.}\, f. + 6\,(df.)^2 d^2 f.\, \text{Sen.}\, f. - \left(4\, df. d^3 f. + (d^2 f.)^2\right) \text{Cos.}\, f. - d^4 f.\, \text{Sen.}\, f.\right)$$

— &c.

§. 20.º

Seguindo a mesma marcha se poderião assignar as formulas especiaes dos desenvolvimentos de outras quaesquer funções duplo angulares; mas além d'isto ser facil, como não conheço utilidade sensivel em assim o fazer, por isso me abstenho de levar mais adiante este processo. Considerando porém que assim mesmo he sujeito a algumas dificuldades, que aliás se podem obviar, cumpre-me advertir, que tendo sido hum dos meus principaes intentos na composição d'este Tratado facilitar o desenvolvimento em Serie das funções cujas raizes são polinomios, ou mesmo Series infinitas, he muito conveniente que observemos que sendo

$$f\,x = f. + \frac{x}{1}\, df. + \frac{x^2}{1.2|1}\, d^2 f. + \frac{x^3}{1.3|1}\, d^3 f. + \frac{x^4}{1.4|1}\, d^4 f. + \&c.$$

será

$$\varphi f\,x = \varphi\left(f. + \frac{x}{1}\, df. + \frac{x^2}{1.2|1}\, d^2 f. + \frac{x^3}{1.3|1}\, d^3 f. + \frac{x^4}{1.4|1}\, d^4 f. + \&c.\right)$$

ora supondo que seja

$$\text{f.}\, x = df. + \frac{x}{1.2|1}\, d^2 f. + \frac{x^2}{1.3|1}\, d^3 f. + \frac{x^3}{1.4|1}\, d^4 f. + \&c.$$

será

$$\varphi f\,x = \varphi\left(f. + x\, \text{f}\, x\right)$$

ou mais simplesmente

$$\varphi f\,x = \varphi\,(x\, \text{f}\, x)$$

e por consequencia considerando $x\,\text{f}\,x$ como huma variavel simples, he claro que o desenvolvimento de $\varphi\,(x\,\text{f}\,x)$ fica comprehendido na formula geral do §. 8? da Secção I.; e por tanto será

$$\varphi\,(x\,\text{f}\,x) = \varphi. + x\,\text{f}\,x.\, \varphi.' + \frac{x^2\, \text{f}^2 x}{1.2|1}\, \varphi.'' + \frac{x^3\, \text{f}^3 x}{1.3|1}\, \varphi.''' + \&c.$$

mas he

$$\mathrm{f}\,x = \mathrm{f.} + \frac{x}{1}\,d\,\mathrm{f.} + \frac{x^2}{1.^2|^1}\,d^2\,\mathrm{f.} + \frac{x^3}{1.^3|^1}\,d^3\,\mathrm{f.} + \&c.$$

$$\overset{2}{\mathrm{f}}\,x = \mathrm{f.}^2 + \frac{x}{1}\,d\,(\mathrm{f.}^2) + \frac{x^2}{1.^2|^1}\,d^2\,(\mathrm{f.}^2) + \frac{x^3}{1.^3|^1}\,d^3\,(\mathrm{f.}^2) + \&c.$$

$$\overset{3}{\mathrm{f}}\,x = \mathrm{f.}^3 + \frac{x}{1}\,d(\mathrm{f.}^3) + \frac{x^2}{1.^2|^1}\,d^2\,(\mathrm{f.}^3) + \frac{x^3}{1.^3|^1}\,d^3\,(\mathrm{f.}^3) + \&c.$$

- -

- -

$$\overset{n}{\mathrm{f.}}\,x = \mathrm{f.}^n + \frac{x}{1}\,d\,(\mathrm{f.}^n) + \frac{x^2}{1.^2|^1}\,d^2\,(\mathrm{f.}^n) + \frac{x^3}{3.^3|^1}\,d^3\,(\mathrm{f.}^n) + \&c.$$

Logo

$$\begin{aligned}\varphi\,(x\,\mathrm{f}\,x) = \varphi. &+ x\,\mathrm{f.}\,\varphi.' + x.^2\,d\,\mathrm{f.}\,\varphi.' + x.^3\,\frac{d^2\,\mathrm{f.}}{1.^2|^1}\,\varphi.' + x.^4\,\frac{d^3\,\mathrm{f.}}{1.^3|^1}\,\varphi.' + \&c.\\ &+ x.^2\,\mathrm{f.}^2\,\frac{\varphi.''}{1.^2|^1} + x.^3 d(\mathrm{f.}^2)\,\frac{\varphi.''}{1.^2|^1} + x.^4\,\frac{d^2(\mathrm{f.}^2)}{1.^2|^1}\,\frac{\varphi.''}{1.^2|^1} + \&c.\\ &+ x.^3\,\mathrm{f.}^3\,\frac{\varphi.'''}{1.^3|^1} + x.^4\,d(\mathrm{f.}^3)\,\frac{\varphi.'''}{1.^3|^1} + \&c.\\ &+ x.^4\,\mathrm{f.}^4\,\frac{\varphi.^{\mathrm{IV}}}{1.^4|^1} + \&c.\\ &+ \&c.\end{aligned}$$

serie que se póde continuar por quantos termos se quizer; pois que o seu termo geral, como, facilmente se reconhece, he

$$x^n\left(\mathrm{f.}^n\,\frac{\varphi.^{n\prime}}{1.^n|^1} + \frac{d\,(\overset{n-1}{\mathrm{f.}})}{1}\,\frac{\varphi.^{(n-1)\prime}}{1.^{n-1}|^1} + \frac{d^2\,(\overset{n-2}{\mathrm{f.}})}{1.^2|^1}\,\frac{\varphi.^{(n-2)\prime}}{1.^{n-2}|^1} + \ldots\ldots + \frac{d^{n-2}\,(\mathrm{f.}^2)}{1.^{n-2}|^1}\cdot\frac{\varphi.''}{1.^2|^1} + \frac{d^{n-1}\,\mathrm{f.}}{1.^{n-1}|^1}\,\varphi.'\right)$$

e que serve para o desenvolvimento das funções polinomias, e mesmo das Series infinitas em outras Series ordenadas segundo as potencias inteiras da sua primitiva raiz x, sempre que $x = 0$ não fizer $\mathrm{f}\,x$ ou alguma das suas fluxões incalculavel, ou *infinita* na fraze ordinaria dos Geometras.

21.°

Antes de passarmos adiante he de razão que façamos aplicação da doutrina precedente a alguns casos que nos facilitem o seu uso em todos os outros. Suponhamos que se pretende desenvolver em huma Serie ordenada segundo as potencias inteiras de x a função dupla

$$\varphi\,(a + a'x + a''x^2 + a'''x^3 + a^{\mathrm{IV}}\,x^4 + \&c.)$$

Para que esta função possa ser representada por $\varphi\,(x\,\mathrm{f}\,x)$ he necessario que seja

$$f x = a' + a'' x + a''' x^2 + a^{IV} x^3 + \&c.$$

e como neste caso he $\varphi. = \varphi a$; $\varphi.' = \varphi' a$; $\varphi.'' = \varphi'' a$; &c. $f. = a'$; $d f. = a''$; $d^2 f. = 2\, a'''$; $d^3 f. = 2.3\, a.^{IV}$; e em geral $d^n f. = 1.^{n|1}\, a.^{(n+1),}$; substituindo estas expressões na formula do §. antecedente, ella se converterá em

$$\varphi\left(a + a' x + a'' x^2 + a''' x^3 + \&c.\right) = \varphi a + x.\, a.'\, \varphi' a$$
$$+ x^2 \left(a.''\, \varphi' a + \overset{2}{a.'} \frac{\varphi'' a}{1.^{2|1}} \right)$$
$$+ x^3 \left(a.'''\, \varphi' a + 2\, a.'\, a.'' \frac{\varphi'' a}{1.^{2|1}} + \overset{3}{a.'} \frac{\varphi''' a}{1.^{3|1}} \right)$$
$$+ x^4 \left(a.^{IV}\, \varphi' a + (2\, a.'\, a.''' + \overset{2}{a.''}) \frac{\varphi'' a}{1.^{2|1}} + 3\, \overset{2}{a'}\, a'' \frac{\varphi''' a}{1.^{3|1}} + \overset{4}{a'} \frac{\varphi^{IV} a}{1.^{4|1}} \right)$$
$$+ \&c.$$

Serie cujo termo geral he

$$x^n \left(\overset{n'}{a} \frac{\varphi\, a}{1.^{n|1}} + a.'\, \overset{n-2}{a.''} \frac{\varphi\, a}{1.^{n-2|1}} + \left(a.'\, \overset{n-3}{a.'''} + \frac{n-3}{2}\, \overset{n-4}{a.'}\, \overset{2}{a.''} \right) \frac{\overset{(n-2),}{\varphi\, a}}{1.^{n-3|1}} + \left(a.'\, \overset{n-4}{a.^{IV}} + (n-4)\, a.'\, a.''\, a.''' + \frac{(n-4)^{2|-1}}{1.^{3|1}}\, \overset{n-6}{a.'}\, a.''^{3} \right) \frac{\overset{(n-3),}{\varphi\, a}}{1.^{n-4|1}} + \ldots\ldots + \overset{n,}{a}\, \varphi' a \right)$$

e se obtem efeituando as substituições convenientes, e as fluxionações indicadas em a expressão do termo geral assignado em §. antecedente.

§. 22.º

Se o Simbolo funcional φ denotar Logarithmo hyperbolico, será

$$\varphi(a + x f x) = \text{Log.}(a + x f x) = \text{Log.}(a + a' x + a'' x^2 + a''' x^3 + a^{IV} x^4 + \&c.)$$

e por tanto $\varphi a = \text{Log.}\, a$; $\varphi' a = \frac{1}{a}$; $\varphi'' a = -\frac{1}{a^2}$; $\varphi''' a = \frac{1.^{2|1}}{a^3}$; $\varphi^{IV} a = -\frac{1.^{3|1}}{a^4}$; $\varphi^{V} a = \frac{1.^{4|1}}{a^5}$; e em geral $\overset{n,}{\varphi}\, a = \pm \frac{1.^{n-1|1}}{a^n}$ servindo o signal + para quando for n número impar, e o signal — para quando for n número par. A substituição dos valores de φa; $\varphi' a$; $\varphi'' a$; &c. na formula do §. antecedente, a converte em

$$\text{Log.}\left(a + a' x + a'' x^2 + a''' x^3 + a^{IV} x^4 + \&c.\right) = \text{Log.}\, a + x \frac{a'}{a}$$
$$+ x^2 \left(\frac{a''}{a} - \tfrac{1}{2} \frac{\overset{2}{a'}}{a^2} \right)$$

$$+ x^3 \left(\frac{a'''}{a} - \frac{a' a''}{a^2} + \frac{1}{1} \frac{a'^3}{a^3} \right)$$

$$+ x^4 \left(\frac{a^{IV}}{a} - \frac{(a' a''' + \frac{1}{2} a''^2)}{a^2} + \frac{a'^2 a''}{a^3} - \frac{1}{2} \frac{a'^4}{a^4} \right)$$

$$+ \&c.$$

Serie cuja lei se torna ainda mais perceptivel expressando os coeficientes de x em fórma recorrente; pois que representando cada hum por hum só caracter, isto he fazendo

$$\frac{a'}{a} = B$$

$$\frac{a''}{a} - \frac{1}{2} \frac{a'^2}{a^2} = C$$

$$\frac{a'''}{a} - \frac{a' a''}{a^2} + \frac{1}{3} \frac{a'^3}{a^3} = D$$

$$\frac{a^{IV}}{a} - \frac{(a' a''' + \frac{1}{2} a''^2)}{a^2} + \frac{a'^2 a''}{a^3} - \frac{1}{4} \frac{a'^4}{a^4} = E$$

&c.

d'estas equações se deduzem as seguintes

$$a B = a'$$

$$a C = a'' - \frac{1}{2} a' B$$

$$a D = a''' - \frac{1}{3} a'' B - \frac{2}{3} a' C$$

$$a E = a^{IV} - \frac{1}{4} a''' B - \frac{2}{4} a'' C - \frac{3}{4} a' D$$

$$a F = a^V - \frac{1}{5} a^{IV} B - \frac{2}{5} a''' C - \frac{3}{5} a'' D - \frac{4}{5} a' E$$

&c.

cuja lei he com efeito assás patente, e facil de reter de memoria.

§. 23°

Preferi o desenvolvimento de $\varphi (a + a' x + a'' x^2 + a''' x^3 \text{ \&c.})$ debaixo da fórma $\varphi (x \, f x)$ ao que rezultaria de contemplar a mesma expressão comprehendida na fórma $\varphi (f. + x \, f x)$ não só porque entrando igualmente nesta expressão f.; d f.; d^2 f.; &c. elle tambem não poderia ter logar nos casos em que $x = o$ faz alguma d'estas funções incalculavel; mas porque então o mesmo desenvolvimento só diferiria do que lhe preferi em achar-se $\varphi f.$ aonde se acha $\varphi.$ e sendo assim rigorosamente identicos seria huma aparencia de maior complicação.

§. 24.°

Se em vez de desenvolvermos $\varphi f x$ do modo exposto no §. 6.°, tivessemos considerado fx como huma simples variavel, então o desenvolvimento de $\varphi f x$ se executaria seguindo a primeira formula do §. 8.° da Secção I., e teriamos

$$\varphi f x = \varphi. + f x.\, \varphi.' + \overset{2}{f x}\, \frac{\varphi.''}{1.2|1} + \overset{3}{f x}\, \frac{\varphi.'''}{1.3|1} + \overset{4}{f x}\, \frac{\varphi.^{\text{IV}}}{1.4|1} + \&c.$$

formula a qual substituindo-se em logar de fx; $\overset{2}{f x}$; $\overset{3}{f x}$; &c. os seus competentes desenvolvimentos se reduz a

$$\begin{aligned}
\varphi f x = \varphi. &+ \frac{\varphi.'}{1} f. + \frac{\varphi.''}{1.2|1} f.^2 + \frac{\varphi.'''}{1.3|1} f.^3 + \frac{\varphi.^{\text{IV}}}{1.4|1} f.^4 + \&c. \\
&+ \frac{x}{1}\Big(\varphi.'\, d\, f. + \frac{\varphi.''}{1.2|1}\, d(f.^2) + \frac{\varphi.'''}{1.3|1}\, d\,(f.^3) + \frac{\varphi.^{\text{IV}}}{1.4|1}\, d\,(f.^4) + \&c. \\
&+ \frac{x^2}{1.2|1}\Big(\varphi.'\, d^2 f. + \frac{\varphi.''}{1.2|1}\, d^2(f.^2) + \frac{\varphi.'''}{1.3|1}\, d^2(f.^3) + \frac{\varphi.^{\text{IV}}}{1.4|1}\, d^2(f.^4) + \&c. \\
&+ \frac{x^3}{1.3|1}\Big(\varphi.'\, d^3 f. + \frac{\varphi.''}{1.2|1}\, d^3(f.^2) + \frac{\varphi.'''}{1.3|1}\, d^3(f.^3) + \frac{\varphi.^{\text{IV}}}{1.4|1}\, d^3(f.^4) + \&c. \Big) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ \frac{x^n}{1.n|1}\Big(\varphi.'\, d^n f. + \frac{\varphi.''}{1.2|1}\, d^n(f.^2) + \frac{\varphi.'''}{1.3|1}\, d^n(f.^3) + \frac{\varphi.^{\text{IV}}}{1.4|1}\, d^n(f.^4) + \&c. \Big)
\end{aligned}$$

ou a

$$\varphi f x = \varphi f. + \frac{x}{1}\, d(\varphi f.) + \frac{x^2}{1.2|1}\, d^2(\varphi f.) + \frac{x^3}{1.3|1}\, d^3(\varphi f.) + \frac{x^4}{1.4|1}\, d^4(\varphi f.) + \&c.$$

considerando $\varphi f.$ como função simples de huma variavel $f.$; por quanto $x = 0$ faz

$$\varphi f. = \varphi. + \varphi.' f. + \frac{\varphi.''}{1.2|1} f.^2 + \frac{\varphi.'''}{1.3|1} f.^3 + \frac{\varphi.^{\text{IV}}}{1.4|1} f.^4 + \&c.$$

expressão da qual considerando $f.$ como huma simples variavel, se deduz

$$d(\varphi f.) = \varphi.'\, d\, f + \frac{\varphi.''}{1.2|1}\, d(f.^2) + \frac{\varphi.'''}{1.3|1}\, d\,(f.^3) + \frac{\varphi.^{\text{IV}}}{1.4|1}\, d\,(f.^4) + \&c.$$

$$d^2(\varphi f.) = \varphi.'\, d^2 f. + \frac{\varphi.''}{1.2|1}\, d^2(f.^2) + \frac{\varphi.'''}{1.3|1}\, d^2(f.^3) + \frac{\varphi.^{\text{IV}}}{1.3|1}\, d^2(f.^4) + \&c.$$

$$d^3(\varphi f) = \varphi.'\, d^3 f. + \frac{\varphi.''}{1.2|1}\, d^3(f.^2) + \frac{\varphi.'''}{1.3|1}\, d^3(f.^3) + \frac{\varphi.^{\text{IV}}}{1.4|1}\, d^3(f.^4) + \&c.$$

e em geral

$$d^n(\varphi f.) = \varphi.'\, d^n f. + \frac{\varphi.''}{1.2|1}\, d^n(f.^2) + \frac{\varphi.'''}{1.3|1}\, d^n(f.^3) + \frac{\varphi.^{\text{IV}}}{1.4|1}\, d^n(f.^4) + \&c.$$

Theorema novo, segundo me persuado, e que póde ter algumas vezes aplicação util como desde já se manifesta; pois que a lei geral nelle indicada para determinar o coeficiente de $\frac{x^n}{1.\overline{n}|1}$ no desenvolvimento de φfx, nos fornèce hum meio de determinar qualquer termo do dito desenvolvimento independentemente do conhecimento dos anteriores, bem como das considerações e proposições hum pouco complicadas, que exige o meio indicado em os §.§. 3.° e seguintes, e que alem d'isso nos facilita a resolução das funções multiplices em Series de funções simpleces.

§. 25.°

Efeituando as fluxionações indicadas das diversas potencias de $f.$, o desenvolvimento de φfx exposto em o §. antecedente toma a seguinte fórma.

$$\varphi fx = \varphi. + \varphi.' f. + \frac{\varphi.''}{1.\overline{2}|1} f.^2 + \frac{\varphi.'''}{1.\overline{3}|1} f.^3 + \frac{\varphi.^{IV}}{1.\overline{4}|1} f^4 + \&c.$$

$$+ x \left(\varphi.' df. + \varphi.'' f. df. + \frac{\varphi.'''}{1.\overline{2}|1} f.^2 df. + \frac{\varphi.^{IV}}{1.\overline{3}|1} f.^3 df. + \&c. \right)$$

$$+ \frac{x^2}{1.\overline{2}|1} \left(\varphi.' d^2 f. + \varphi.'' \left(f. d^2 f. + (df.)^2 \right) + \frac{\varphi.'''}{1.\overline{2}|1} \left(f.^2 d^2 f. + 2 f. (df.)^2 \right) + \right.$$

$$\left. \frac{\varphi^{IV}}{1.\overline{3}|1} \left(f.^3 d^2 f. + 3 f.^2 (df.)^2 \right) + \&c. \right.$$

$$+ \frac{x^3}{1.\overline{3}|1} \left(\varphi.' d^3 f. + \varphi.'' \left(f. d^3 f. + 3 df. d^2 f. \right) + \frac{\varphi.'''}{1.\overline{2}|1} \left(f.^2 d^3 f. + 6 f. df. d^2 f. + 2 (df.)^3 \right) + \frac{\varphi.^{IV}}{1.\overline{3}|1} \right.$$

$$\left. \left(f.^3 d^3 f. + 9 f.^2 df. d^2 f. + 6 f. (df.)^3 + \&c. \right) \right.$$

$$+ \&c.$$

§. 26.°

Supondo que os algorithmos funcionaes sejão identicos elle se converte em

$$\varphi \varphi x = \varphi. + \varphi.' \varphi. + \frac{\varphi.''}{1.\overline{2}|1} \varphi.^2 + \frac{\varphi.'''}{1.\overline{3}|1} \cdot \varphi.^3 + \frac{\varphi^{IV}}{1.\overline{4}|1} \varphi.^4 + \&c.$$

$$+ \frac{x}{1} \left(\varphi.^2 + \varphi.'' \varphi.' \varphi. + \frac{\varphi.'''}{1.\overline{2}|1} \cdot \varphi.' \varphi.^2 + \frac{\varphi.^{IV}}{1.\overline{3}|1} \varphi.' \varphi.^3 + \&c. \right)$$

$$+ \frac{x^2}{1.\overline{2}|1} \left(\varphi.' \varphi.'' + \varphi'' \left(\varphi. \varphi.'' + \varphi.^2 \right) + \frac{\varphi.'''}{1.\overline{2}|1} \left(\varphi.^2 \varphi.'' + 2 \varphi \varphi^2 \right) + \right.$$

$$\left. \frac{\varphi.^{IV}}{1.\overline{3}|1} \left(\varphi.^3 \varphi.'' + 3 \varphi.^2 \varphi.^2 \right) + \&c. \right)$$

$$+\frac{x^3}{1.3|1}\left(\varphi.'\varphi.'''+\varphi.''\left(\varphi.\varphi'''+3\varphi.'\varphi''\right)+\frac{\varphi.'''}{1.2|1}\left(\varphi.^2\varphi.'''+6\varphi.\varphi.'\varphi.''+2\varphi.^3\right)+\frac{\varphi.^{IV}}{1.3|1}\left(\varphi.^3\varphi.'''\right.\right.$$

$$\left.\left.+9\varphi.^2\varphi.'\varphi.''+6\varphi.\varphi.^4\right)+\&c.\right)$$

$$+\&c.$$

§. 27.°

Para desenvolver em Serie huma função tripla $F\varphi fx$ de huma só variavel x são trez os meios que se nos oferecem, 1.° Considerando, como a expressão indica, ser x huma variavel simples afecta do triplice algorithmo funcional $F\varphi f$. 2.° Contemplando fx como huma variavel simples afecta do duplicado algorithmo funcional $F\varphi$. E 3.° considerando φfx como huma variavel simples afecta do algorithmo funcional singelo F. Pelo primeiro modo teremos.

$$F\varphi fx=F\varphi f.+\frac{x}{1}F'\varphi f.\varphi' f.df.$$

$$+\frac{x^2}{1.2|1}\left(\left(F''\varphi f.\varphi.^2 f.+F'\varphi f.\varphi'' f.\right)(df.)^2+F'\varphi f.\varphi' f.d^2 f.\right)$$

$$+\frac{x^3}{1.3|1}\left(\left(F'''\varphi f.\varphi.^3 f.+3F''\varphi f.\varphi' f.\varphi'' f.+F'\varphi f.\varphi''' f.\right)(df.)^3+3\left(F''\varphi f.\varphi^{\cdot 2} f.+\right.\right.$$

$$\left.\left.F'\varphi f.\varphi'' f.\right)df.d^2 f.+F'\varphi f.\varphi' f.d^3 f.\right)$$

$$+\frac{x^4}{1.4|1}\left(\left(F^{IV}\varphi f.\varphi.^4 f.+6F'''\varphi f.\varphi.^2 f.\varphi'' f.+F''\varphi f.\left(4\varphi' f.\varphi''' f.+3\varphi''^2 f.\right)+\right.\right.$$

$$F'\varphi f.\varphi^{IV} f.\left.\right)(df.)^4+6\left(F'''\varphi f.\varphi.^3 f.+3F''\varphi f.\varphi' f.\varphi'' f.+\right.$$

$$F'\varphi f.\varphi''' f.\left.\right)(df.)^2 d^2 f.+\left(F''\varphi f.\varphi.^2 f.+F'\varphi f.\varphi'' f.\right)$$

$$\left.\left.\left(4df.d^3 f.+3(d^2 f.)^2\right)+F'\varphi f.\varphi' f.d^4 f.\right)\right.$$

$$+\&c.$$

Serie em a qual se observa repetida a lei da formação dos termos do desenvolvimento exposto em o §. 6.°; e que por tanto se póde continuar por tantos termos quantos se quizer.

§. 28.°

Pelo segundo modo teremos

$$F\varphi fx=F\varphi.+fx.dF\varphi.+f^2x\frac{d^2F\varphi.}{1.2|1}+f^3x\frac{d^3F\varphi.}{1.3|1}+f^4x\frac{d^4F\varphi.}{1.4|1}+\&c.$$

formula que pela substituição dos desenvolvimentos particulares das funções fx; f^2x; f^3x; &c. em logar das mesmas funções se converte em

$$F\varphi fx = F\varphi. + f.dF\varphi. + f.^2\frac{d^2F\varphi.}{1.2|1} + f.^3\frac{d^3F\varphi.}{1.3|1} + f.^4\frac{d^4F\varphi.}{1.4|1} + \&c.$$
$$+ \frac{x}{1}\left(df.\,dF\varphi. + d(f.^2)\frac{d^2F\varphi.}{1.2|1} + d(f.^3)\frac{d^3F\varphi.}{1.3|1} + d(f.^4)\frac{d^4F\varphi.}{1.4|1} + \&c.\right)$$
$$+ \frac{x^2}{1.2|1}\left(d^2f.\,dF\varphi. + d^2(f.^2)\frac{d^2F\varphi.}{1.2|1} + d^2(f.^3)\frac{d^3F\varphi.}{1.3|1} + d^2(f.^4)\frac{d^4F\varphi.}{1.4|1} + \&c.\right)$$
$$+ \frac{x^3}{1.3|1}\left(d^3f.\,dF\varphi. + d^3(f.^2)\frac{d^2F\varphi.}{1.2|1} + d^3(f.^3)\frac{d^3F\varphi.}{1.3|1} + d^3(f.^4)\frac{d^4F\varphi.}{1.4|1} + \&c.\right)$$
$$+ \&c.$$

Efeituando as fluxionações indicadas, esta expressão se converte em outra, que não expresso por ser facil de assignar, e por não sobrecarregar este Escripto com formulas desnecessarias.

§. 29.º

Finalmente pelo terceiro modo teremos

$$F\varphi fx = F. + \varphi fx\,F.' + \varphi^2 fx\,\frac{F.''}{1.2|1} + \varphi^3 fx\,\frac{F.'''}{1.3|1} + \varphi^4 fx\,\frac{F.^{IV}}{1.4|1} + \&c.$$

formula, que pela substituição dos desenvolvimentos particulares de φfx; $\varphi^2 fx$; $\varphi^3 fx$; &c. em logar d'estas funções se converte em

$$F\varphi fx = F. + \varphi f.F.' + \varphi^2 f.\frac{F.''}{1.2|1} + \varphi^3 f.\frac{F.'''}{1.3|1} + \varphi^4 f.\frac{F.^{IV}}{1.4|1} + \&c.$$
$$+ \frac{x}{1}\left(d(\varphi f.)F.' + d(\varphi^2 f.)\frac{F.''}{1.2|1} + d(\varphi^3 f.)\frac{F.'''}{1.3|1} + d(\varphi^4 f.)\frac{F.^{IV}}{1.4|1} + \&c.\right)$$
$$+ \frac{x^2}{1.2|1}\left(d^2(\varphi f.)F.' + d^2(\varphi^2 f.)\frac{F.''}{1.2|1} + d^2(\varphi^3 f.)\frac{F.'''}{1.3|1} + d^2(\varphi^4 f.)\frac{F.^{IV}}{1.4|1} + \&c.\right)$$
$$+ \&c.$$

expressão, a que não dou ulterior desenvolvimento pelas mesmas razões ponderadas em o §. antecedente.

§. 30.º

Os desenvolvimentos de $F\varphi fx$, que acabamos de indicar em os dois §.§. antecedentes, sendo apenas aplicaveis como he facil de ver, hum aos casos em que $F\varphi x$ tem huma fluxão constante, e outro aos casos em que Fx gosá d'esta propriedade, exige a natureza do assumpto que propuz tratar, que lhe substitua outras, cuja aplicação não seja limitada por estas condições. Para isto em vez de contemplarmos $F\varphi fx$ como a formula geral das funções triplices, representaremos este genero de funções por

$F\varphi(xfx)$, ou por $F(x\varphi fx)$ ou finalmente por $F(x\varphi(xfx))$. Começando pela primeira das trez indicadas fórmas, e contemplando xfx como huma simples variavel, teremos

$$F\varphi(xfx) = F\varphi. + xfx\,dF\varphi. + x^2\overset{2}{f}x\frac{d^2F\varphi}{1.2|1} + x^3\overset{3}{f}x.\frac{d^3F\varphi}{1.3|1} + x^4\overset{4}{f}x\frac{d^4F\varphi.}{1.4|1} + \&c.$$

expressão que pela substituição dos competentes desenvolvimentos de fx; $\overset{2}{f}x$; $\overset{3}{f}x$; &c em logar d'estas funções se reduz a

$$\begin{aligned}F\varphi(xfx) = F\varphi. &+ xf.\,dF\varphi. + x^2\,df.\,dF\varphi. + x^3\frac{d^2f.}{1.2|1}\,dF\varphi. + x^4\frac{d^3f.}{1.3|1}\,dF\varphi. + \&c.\\ &+ x.^2f.^2\frac{d^2F\varphi}{1.2|1} + x^3\,d(f.^2)\frac{d.^2F\varphi.}{1.2|1} + x^4\frac{d^2(f.^2)}{1.2|1}\frac{d^2F\varphi.}{1.2|1} + \&c.\\ &+ x.^3f.^3\frac{d^3F\varphi.}{1.3|1} + x^4\,d(f.^3)\frac{d^3F\varphi.}{1.3|1} + \&c.\\ &+ x.^4f.^4\frac{d^4F\varphi.}{1.4|1} + \&c.\\ &+ \&c.\end{aligned}$$

e que sobre ser facil de continuar, em razão de ser assás patente a lei da formação dos seus termos, abrange todos os casos possiveis, á excepção d'aquelles em que $F\varphi x$, ou fx, ou alguma das suas fluxões se tornão incalculaveis pela suposição de $x = 0$.

§. 31.º

Tomando $F(x\varphi fx)$ por formula geral das funções triplices de huma só variavel, e contemplando $x(\varphi fx)$ como huma variavel simples, teremos

$$F(x\varphi fx) = F. + x\varphi fx.F.' + x^2\varphi^2fx.\frac{F.''}{1.2|1} + x^3\varphi.^3fx.\frac{F.'''}{1.3|1} + \&c.$$

Substituindo em logar de φfx; φ^2fx; φ^3fx; &c. os seus competentes desenvolvimentos, esta expressão se converte em

$$\begin{aligned}F(x\varphi fx) = F. &+ x.\varphi f.F.' + x^2\,d(\varphi f)F.' + x^3\frac{d^2(\varphi f.)}{1.2|1}F.' + x^4\frac{d^3(\varphi f.)}{1.3|1}F.' + \&c.\\ &+ x.^2\varphi^2f.\frac{F.''}{1.2|1} + x^3\,d(\varphi^2f.)\frac{F.''}{1.2|1} + x^4\frac{d^2(\varphi^2f.)}{1.2|1}\frac{F.''}{1.3|1} + \&c.\\ &+ x^3\varphi^3f.\frac{F.'''}{1.3|1} + x^4\,d(\varphi^3f.)\frac{F.'''}{1.3|1} + \&c.\\ &+ x^4\varphi^4f.\frac{F.^{IV}}{1.4|1} + \&c.\\ &+ \&c.\end{aligned}$$

Serie a que não dou o ulterior desenvolvimento, que lhe compete efeituando as fluxionações indicadas, por ser operação de facil execução, e que neste logar só serviria de alongar as expressões algoritmicas, que d'este modo apontadas se fazem mais perceptiveis.

§. 32.º

Nós poderiamos igualmente, como já notei, representar qualquer função triplice de huma só variavel x por $F(x\varphi(xfx))$; e nesse caso contemplando $x\varphi(xfx)$ como huma variavel simples teriamos

$$F\left(x\varphi(xfx)\right) = F. + x\varphi(xfx).F.' + x^2\varphi^2(xfx).\frac{F.''}{1.2|1} + x^3\varphi^3(xfx).\frac{F.'''}{1.3|1} + \&c.$$

expressão que pela substituição dos desenvolvimentos de $\varphi(xfx)$; $\varphi^2(xfx)$; $\varphi^3(xfx)$; &c. em logar d'estas funções se converte em

$$\begin{aligned}
F\left(x\varphi(xfx)\right) = {} & F. + x.\varphi.F.' + x^2 f.\varphi.'F.' + x^3 d f.\varphi.'F.' + x^4 d^2 f.\varphi.'F.' + \&c. \\
& + x^3 f.^2 \frac{\varphi.''}{1.2|1} F.' + x^4 d(f.^2)\frac{\varphi.''}{1.2|1} F.' + \&c. \\
& + x^4 f.^3 \frac{\varphi.'''}{1.3|1} F.' + \&c. \\
& + x^2\varphi.^2 \frac{F.''}{1.2|1} + x^3 f.\varphi.^{2\prime}\frac{F.''}{1.2|1} + x^4 d f.\varphi.^{2\prime}\frac{F.''}{1.2|1} + \&c. \\
& + x^4 f.^2 \frac{\varphi.^{2\prime\prime}}{1.2|1}\frac{F''}{1.2|1} + \&c. \\
& + x^3\varphi.^3\frac{F.'''}{1.3|1} + x^4 f.\varphi^{3\prime}\frac{F.'''}{1.3|1} + \&c. \\
& + x^4\varphi.^4\frac{F.^{IV}}{1.4|1} + \&c. \\
& + \&c.
\end{aligned}$$

Serie na aparencia hum pouco mais complicada, mas que á facilidade da sua continuação reune a ventajem de não involver senão expressões de funções simplices; o que de ordinario concorre para facilitar os calculos.

§. 33.º

Pelo mesmo estilo se poderião assignar os desenvolvimentos geraes das funções quadruplices, e em geral de todas as funções multiplices: mas

sem demorarme em hum trabalho, que no estado actual das Sciencias mathematicas seria de pouca ou nenhuma utilidade, devo contentarme com ter apontado o caminho que conduz a este fim, e com tanta precisão que quem pertender segui-lo, não poderá por certo erra-lo. O que me resta por tanto em taes circunstancias, além de indicar o desenvolvimento das funções de mais de huma variavel (o que será objecto da seguinte Secção) he apontar os diversos ramos ou methodos da Sciencia algorithmica, que se achão tacitamente incluidos na Theoría do desenvolvimento das funções, ou com ella intimamente connexos, e mostrar como dos principios até aqui expostos se deduz facilmente a resolução de hum grande número de Problemas, de que se occupárão grandes Geometras, e cuja resolução foi geralmente olhada como o rezultado da mais sublime perspicacia, e das mais profundas meditações.

§. 34.

A primeira doutrina ou Methodo algorithmico que se manifesta inclusivamente no desenvolvimento das funções duplas he o da reversão das Series. E com efeito que outra cousa he „ dada huma Serie

$$a x + b x^2 + c x^3 + d x^4 + e x^5 + f x^6 + \&c.$$

que se supoem igual a y, pedir que x se expresse em outra Serie da fórma

$$\alpha y + \beta y^2 + \gamma y^3 + \delta y^4 + \varepsilon y^5 + \&c.$$

senão reconhecer que x, e y são funções reciprocas; e dado o desenvolvimento de y em função de x, pedir o desenvolvimento de x em função de y? Esta questão reduz-se por tanto a pedir o desenvolvimento de huma função duplice de x; por quanto sendo $y = x f x$, e $x = \varphi y$; será $\varphi y = \varphi (x f x)$. Ora he evidente que sendo

$$y = x f. + x^2 f.' + \frac{x^3}{1.2|1} f.'' + \frac{x^4}{1.3|1} f.''' + \frac{x^5}{1.4|1} f.^{IV} + \&c.$$

e

$$\varphi y = \varphi. + y \varphi.' + y^2 \frac{\varphi.''}{1.2|1} y.^3 + \frac{\varphi.'''}{1.3|1} + y.^4 \frac{\varphi.^{IV}}{1.4|1} + \&c.$$

esta função em que consiste a expressão ou valor de x ficará determinada logo que se determinem os valores de $\varphi.$; $\varphi.'$; $\varphi.''$; &c. em funções das expressões conhecidas $f.$; $f.'$; $f.''$; &c; mas he

$$\varphi (x f x) = \varphi. + x f. \varphi.' + x^2 f.' \varphi.' + x^3 \frac{f.''}{1.2|1} \varphi.' + x^4 \frac{f.'''}{1.3|1} \varphi.' + \&c.$$

$$+ x^2 f.^2 \frac{\varphi.''}{1.2|1} + x^3 f.^2{}' \frac{\varphi.''}{1.2|1} + x^4 \frac{f.^2{}''}{1.3|1} \frac{\varphi.''}{1.2|1} + \&c.$$

$$+ x^3 f.^3 \frac{\varphi.'''}{1.^{3|1}} + x.^4 f.^{3\prime} \frac{\varphi.'''}{1.^{3|1}} + \&c.$$

$$+ x^4 f.^4 \frac{\varphi.^{IV}}{1.^{4|1}} + \&c.$$

$$+ \&c.$$

e como a equação $x = \varphi(xfx)$ deve ter logar qualquer que seja o valor de x, as equações de condição, que devem verificar-se, são as seguintes

$$\varphi. = 0$$

$$f.\varphi.' = 1$$

$$f.'\varphi.' + f.^2 \frac{\varphi.''}{2} = 0$$

$$f.''\varphi.' + 2 f. f.' \varphi.'' + f.^3 \frac{\varphi.'''}{3} = 0$$

$$f.'''\varphi.' + 3 (f.'^2 + f.' f.''')\varphi.'' + 3. f.^2 f.' \varphi.''' + f.^4 \frac{\varphi.^{IV}}{4} = 0$$

&c.

D'ellas se tira

$$\varphi.' = f.^{-1}$$

$$\frac{\varphi.''}{1.^{2|1}} = - f.' f.^{-3}$$

$$\frac{\varphi.'''}{1.^{3|1}} = (2 f.'^2 - \tfrac{1}{2} f. f.'').\ f.^{-5}$$

$$\frac{\varphi.^{IV}}{1.^{4|1}} = - (5 f.'^3 - \tfrac{5}{2} f. f.' f.'' + \tfrac{1}{6} f.^2 f.''').\ f.^{-7}$$

&c.

e por consequencia será

$$x = y. f.^{-1} - y^2 f.' f.^{-3} + y^3 (2 f.'^2 - \tfrac{1}{2} f. f.'') f.^{-5} - y^4 (5 f.'^3 - \tfrac{5}{2} f. f.' f.'' + \tfrac{1}{6} f.^2 f.''') f.^{-7} + \&c.$$

ou mais simplesmente

$$x = y. f.^{-1} + \frac{y^2}{1.^{2|1}} d\left(f.^{-2}\right) + \frac{y^3}{1.^{3|1}} d^2\left(f.^{-3}\right) + \frac{y^4}{1.^{4|1}} d^3\left(f.^{-4}\right) + \&c.$$

Porém comparando o desenvolvimento de y com a Serie

$$a x + b x^2 + c x^3 + d x^4 + e x^5 + \&c.$$

que se supoem equivalente $a\ y$; he $f. = a$; $f.' = b$; $f.'' = 1.^{2|1}\ c$; $f.''' = 1.^{3|1}\ d$; $f.^{IV} = 1.^{4|1}\ e$; &c. Logo

$$\varphi.' = \frac{1}{a}$$

$$\frac{\varphi.''}{1.^{2|1}} = - \frac{b}{a.^2}$$

$$\frac{\varphi.^{III}}{1.^{3}|^{1}} = \frac{2\,b^2 - a\,c}{a.^5}$$

$$\frac{\varphi.^{IV}}{1.^{4}|^{1}} = -\left(\frac{5\,b^3 - 5\,a\,b\,c + a^2\,d}{a^7}\right)$$

&c.

que são os valores achados por Newton, seguindo hum trilho muito diverso, e mais trabalhoso, como póde vêr-se no seu Opusculo XI. da Collecção formada por Castillon, e impressa em Lausane no anno 1744: e fica por tanto

$$x = \frac{1}{a}\left(y - \frac{b}{a^2}y^2 + \left(\frac{2\,b^2 - a\,c}{a^4}\right)y^3 - \left(\frac{5\,b^3 - 5\,a\,b\,c + a^2\,d}{a^6}\right)y^4 + \&c.\right)$$

§. 35.°

Se a Serie proposta em vez de conter todas as potencias inteiras de x contivesse sómente as potencias impares, isto he se fosse

$$y = a\,x + b\,x^3 + c\,x^5 + d\,x^7 + e\,x^9 + \&c.$$

e se pertendesse exprimir x em função de y, que he o caso do segundo Theorema de Newton no Opusculo citado, então não haveria mais do que suppôr na expressão do desenvolvimento de fx cada huma das funções $f.'$; $f.'''$; $f.^{v}$; &c. afectas de número impar de acentos igual a cifra, e determinar nesta suposição os valores de $\varphi.$; $\varphi.'$; $\frac{\varphi.''}{1.^{2}|^{1}}$; $\frac{\varphi.'''}{1.^{3}|^{1}}$; &c.

Praticandosse assim achasse

$$\varphi. = 0 \text{ ---------- } \varphi.' = \overset{-1}{f.}$$

$$\frac{\varphi.''}{1.^{2}|^{1}} = 0 \text{ ---------- } \frac{\varphi.'''}{1.^{3}|^{1}} = -\frac{f.''}{1.^{2}|^{1}}\overset{-4}{f.}$$

$$\frac{\varphi.^{IV}}{1.^{4}|^{1}} = 0 \text{ ---------- } \frac{\varphi.^{V}}{1.^{5}|^{1}} = \frac{(18\,f.''^2 - f.\,f.^{V})}{1.^{4}|^{1}}\overset{-7}{f.}$$

$$\frac{\varphi.^{VI}}{1.^{6}|^{1}} = 0 \text{ ---------- } \frac{\varphi.^{VII}}{1.^{7}|^{1}} = -\left(\frac{1080\,f.''^3 - 120\,f.\,f.''\,f.^{IV} + f.^2\,f.^{IV}}{1.^{6}|^{1}}\right)\overset{-10}{f.}$$

&c. &c.

mas sendo $f. = a$; $f.'' = 1.^{2}|^{1}\,b$; $f.^{IV} = 1.^{4}|^{1}\,c$; $f.^{VI} = 1.^{6}|^{1}\,d$; &c. estas expressões se reduzem a

$$\varphi.' = \frac{1}{a}$$

$$\frac{\varphi.'''}{1.^{3}|^{1}} = -\frac{b}{a^4}$$

$$\frac{\varphi.^{V}}{1.^{5}|^{1}} = \frac{3\,b^2 - a\,c}{a.^7}$$

$$\frac{\varphi.^{VII}}{1.2|1} = -\frac{(12\,b^3 - 8\,a\,b\,c + a^2\,d)}{a.^{15}}$$

$$\frac{\varphi.^{IX}}{1.9|1} = \frac{55\,b^4 - 55\,a\,b^2\,c + 5\,a^2\,(2\,b\,d + c^2) - a^3\,e}{a.^{13}}$$

&c.

e sendo substituidas na formula

$$\varphi y = \varphi. + y\,\varphi.' + y^2\,\frac{\varphi.''}{1.2|1} + y^3\,\frac{\varphi.'''}{1.3|1} + y^4\,\frac{\varphi.^{IV}}{1.4|1} + \&c.$$

dão

$$x = \frac{1}{a}\left(y - \frac{b}{a^3}\,y.^3 + \frac{(3\,b^2 - a\,c)}{a.^6}\,y.^5 - \frac{(12\,b^3 - 8\,a\,b\,c + a^2\,d)}{a.^9}\,y^7 + \&c.\right)$$

§. 36.º

Sendo $y = \text{Sen. } x$, e querendo-se reverter da expressão

$$\text{Sen. } x = x - \frac{x^3}{1.3|1} + \frac{x^5}{1.5|1} - \frac{x^7}{1.7|1} + \frac{x^9}{1.9|1} - \&c.$$

para a expressão do angulo x considerado como função do seu Seno; então sendo $a = 1$; $b = -\frac{1}{1.3|1}$; $c = \frac{1}{1.5|1}$; $d = -\frac{1}{1.7|1}$; &c., a substituição d'estes valores nas expressões de $\varphi.'$; $\frac{\varphi.'''}{1.3|1}$; $\frac{\varphi.^{V}}{1.5|1}$; &c. dando

$$\varphi.' = 1$$

$$\frac{\varphi.'''}{1.3|1} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}$$

$$\frac{\varphi.^{V}}{1.5|1} = \frac{1}{5}.\frac{1}{2.2|2}$$

$$\frac{\varphi.^{VII}}{1.7|1} = \frac{1}{7}.\frac{1.3|2}{2.3|2}$$

$$\frac{\varphi.^{IX}}{1.9|1} = \frac{1}{9}.\frac{1.4|2}{2.4|2}$$

&c.

nos fazem ver que he

$$x = \text{Sen. } x + \frac{1}{3}.\frac{1}{2}\,\text{Sen.}^3 x + \frac{1}{5}.\frac{1.2|2}{2.2|2}\,\text{Sen.}^5 x + \frac{1}{7}.\frac{1.3|2}{2.3|2}\,\text{Sen.}^7 + \&c.$$

§. 37.º

Ainda que tendo dado em o §. 20.º a expressão do termo geral da Serie rezultante do desenvolvimento de $\varphi(x f x)$, he facil de obter as ex-

pressões de $\varphi.'$; $\varphi.''$; $\varphi.'''$; &c. correspondentes ao desenvolvimento de $\varphi.y$, quando esta função deve exprimir o valor de x; com tudo reflectindo sobre os valores de $\varphi.'$; $\varphi.''$; $\varphi.'''$; &c achados em o §. 34.º, facilmente se descobre que elles seguem huma lei mui perceptivel, a qual facilita a sua determinação independentemente de se recorrer á formação dos termos da Serie rezultante do desenvolvimento de $\varphi(xfx)$; por quanto sendo $\varphi.' = f.^{-1}$, será

$$\varphi.'^{n} = f.^{-n}$$

$$d(\varphi.'^{n}) = -n f.' f.^{-(n+1)}$$

$$d^2(\varphi.'^{n}) = n.^{2|1} f.'^{2} f.^{-(n+2)} - n.f.'' f.^{-(n+1)}$$

$$d^3(\varphi.'^{n}) = -n.^{3|1} f.'^{3} f.^{-(n+3)} + 3\,n.^{2|1} f.' f.'' f.^{-(n+2)} - n f.''' f.^{-(n+1)}$$

$$d^4(\varphi.'^{n}) = n.^{4|1} f.'^{4} f.^{-(n+4)} - 6\,n.^{3|1} f.'^{2} f.'' f.^{-(n+3)} + n.^{2|1}\left(4f.' f.''' + 3f.''^{2}\right) f.^{-(n+2)} - n f.^{IV} f.^{-(n+1)}$$

&c.

Donde se segue que fazendo successivamente $n = 1$; $n = 2$; $n = 3$; &c. será

$$\varphi.' = f.^{-1}$$

$$d(\varphi.'^{2}) = -2 f.' f.^{-3}$$

$$d^2(\varphi.'^{3}) = 3\left(4f.'^{2} - f.f.''\right) f.^{-5}$$

$$d^3(\varphi.'^{4}) = -4\left(5.^{2|1} f.'^{3} - 3.5 f.f.' f.'' + f.^2 f.'''\right) f.^{-7}$$

$$d^4(\varphi.'^{5}) = 5\left(6.^{3|1} f.'^{4} - 6.6.^{2|1} f.f.'^{2} f.'' + 6(4 f.' f.''' + 3 f.''^{2}) - f.^3 f.^{IV}\right) f.^{-9}$$

&c.

e que por consequencia he $\varphi.'' = d(\varphi.'^{2})$; $\varphi.''' = d^2(\varphi.'^{3})$; $\varphi.^{IV} = d^3(\varphi.'^{4})$, e em geral $\varphi.^{n} = d^{n-1}(\varphi.'^{n})$: valores, que substituidos na expressão de φy, dão

$$x = y.\varphi.' + y.^2 \frac{d(\varphi.'^{2})}{1.2|1} + y.^3 \frac{d^2(\varphi.'^{3})}{1.3|1} + y.^4 \frac{d^3(\varphi.'^{4})}{1.4|1} + y.^5 \frac{d^4(\varphi.'^{5})}{1.5|1} + \&c.$$

ou, advertindo que he $\varphi.' = f.^{-1}$

$$x = y.f.^{-1} + y^2 \frac{d(f.^{-2})}{1.2|1} + y^3 \frac{d^2(f.^{-3})}{1.3|1} + y^4 \frac{d^3(f.^{-4})}{1.4|1} + y^5 \frac{d^4(f.^{-5})}{1.5|1} + \&c.$$

como indicamos em o §. 34.º

§. 38.º

Pois que as duas equações $y = x f x$; e $x = \varphi y$, ou

$$y = x f. + x^2 f.' + \frac{x^3}{1.2|1} f.'' + \frac{x^4}{1.3|1} f.''' + \frac{x^5}{1.4|1} f.^{IV} + \&c.$$

e

$$x = y\,\varphi.' + y^2 \frac{d(\varphi.'^2)}{1.2|1} + y^3 \frac{d^2(\varphi.'^3)}{1.3|1} + y^4 \frac{d^3(\varphi.'^4)}{1.4|1} + \&c.$$

devem ter logar qualquer que seja o valor de y, se for $y = 1$, será

$$1 = x f. + x.^2 f.' + \frac{x^3}{1.2|1} f.'' + \frac{x^4}{1.3|1} f.''' + \frac{x^5}{1.4|1} f.^{IV} + \&c.$$

e

$$x = \varphi.' + \frac{d(\varphi.'^2)}{1.2|1} + \frac{d^2(\varphi.'^3)}{1.3|1} + \frac{d^3(\varphi.'^4)}{1.4|1} + \frac{d^4(\varphi.'^5)}{1.5|1} + \&c.$$

mas he $\varphi.' = f.^{-1}$; logo

$$x = f.^{-1} + \frac{d(f.^{-2})}{1.2|1} + \frac{d^2(f.^{-3})}{1.3|1} + \frac{d^3(f.^{-4})}{1.4|1} + \frac{d^4(f.^{-5})}{1.5|1} + \&c.$$

ou

$$x = f.^{-1} - f.' f.^{-3} + (2 f.'^2 - \tfrac{1}{2} f. f.'') f.^{-5} - (5 f.'^3 - \tfrac{5}{2} f. f.' f.'' + \tfrac{1}{6} f.^2 f.''') f.^{-7} + \&c.$$

e como qualquer equação de qualquer gráo que seja se póde sempre reduzir á fórma

$$1 = a x + b x^2 + c x^3 + d x^4 + e x^5 + f x^6 + \&c.$$

e neste caso he $f. = a$; $f.' = b$; $f.'' = 1.2|1\, c$; $f.''' = 1.3|1\, d$; $f.^{IV} = 1.4|1\, e$; &c. será

$$x = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{b}{a^2} + \frac{(2 b^2 - a c)}{a^4} - \frac{(5 b^3 - 5 a b c + a^2 d)}{a^6} + \&c.\right)$$

o valor de huma das raizes da equação. Esta conclusão he legitimamente deduzida dos principios antecedentes: mas a discussão das difficuldades, a que ella dá occasião, he impropria d'este logar.

§. 39.º

Se em vez de havermos suposto $y = x f x$, tivessemos suposto $y = f x$, então seria

$\varphi y = \varphi f x = x$

$$d\,\varphi y = \varphi' f x . f' x = 1$$

$$d^2 \varphi y = \varphi'' f x . f'^2 x + \varphi' f x . f'' x$$

$$d^3 \varphi y = \varphi''' f x . f'^3 x + 3\,\varphi'' f x . f' x . f'' x + \varphi' f x . f''' x .$$

$$d^4 \varphi y = \varphi^{IV} f x . f'^4 x + 6\,\varphi''' f x . f'^2 x . f'' x + \varphi'' f x\,(4 f' x . f''' x + 3 f''^2 x) + \varphi' f x\, f^{IV} x .$$

&c.

Representando por a hum valor de x, que faça $y = 0$; a será de necessidade raiz da equação $fx = 0$. Ora das equações antecedentes deduz-se pela substituição de a em logar de x

$$\varphi_. = a$$

$$d\,\varphi_. = \varphi' f' a = 1$$

$$d^2 \varphi_. = \varphi_.'' f'^2 a + \varphi_.' f'' a = 0$$

$$d^3 \varphi_. = \varphi_.''' f'^3 a + 3\,\varphi_.'' f' a . f'' a + \varphi_.' f''' a = 0$$

$$d^4 \varphi_. = \varphi_.^{VI} f'^4 a + 6\,\varphi_.''' f'^2 a f'' a + \varphi_.'' (4 f' a f''' a + 3 f''^2 a) + \varphi_.' f^{IV} a = 0$$

&c.

E d'estas

$$\varphi_.' = \overline{f' a}^{\,1}$$

$$\varphi_.'' = -f'' a . \overline{f' a}^{\,3}$$

$$\varphi_.''' = \left(3 f''^2 a - f' a . f''' a\right) \overline{f' a}^{\,5}$$

$$\varphi_.^{IV} = -\left(15 f''^3 a . - 10 f' a . f'' a . f''' a + f'^2 a f^{IV} a\right) \overline{f' a}^{\,7}$$

&c.

substituindo estes valores na formula

$$\varphi y = \varphi_. + y\,\varphi_.' + y^2 \frac{\varphi_.''}{1.2|1} + y^3 \frac{\varphi_.'''}{1.3|1} + y^4 \frac{\varphi_.^{IV}}{1.4|1} + \&c.$$

se tem finalmente

$$x = a + y \overline{f' a}^{\,1} - \frac{y^2}{1.2|1} f'' a . \overline{f' a}^{\,3} + \frac{y^3}{1.3|1}\left(3 f''^2 a - f' a . f''' a\right) \overline{f' a}^{\,5} -$$

$$\frac{y^4}{1.4|1}\left(15 f''^3 a - 10 f' a . f'' a . f''' a + f'^2 a . f^{IV} a\right) \overline{f' a}^{\,7} + \&c.$$

ou

$$x = a + \overline{f' a}^{\,1}\left(y + \frac{y^2}{1.2|1} d\left(\overline{f' a}^{\,1}\right) + \frac{y^3}{1.3|1} d\left(\overline{f' a}^{\,1} d\left(\overline{f' a}^{\,1}\right)\right) + \frac{y^4}{1.4|1} d\left(\overline{f' a}^{\,1} d\left(\overline{f' a}^{\,1} d\left(\overline{f' a}^{\,1}\right)\right)\right) + \&c.\right)$$

formula cuja lei he assás patente, e que com a outra que assignamos em o §. 34.º completa a doutrina da reversão das Series, ou das funções re-

ciprocas; pois que ella comprehende todos os casos dependentes da resolução da equação $fx = 0$, que são precisamente os que a outra não abrange.

§. 40.°

Ainda que o Methodo da reversão das Series não fosse ao principio contemplado senão em o ponto de vista, que acabamos de exppôr, com tudo elle póde ser considerado, e o tem já sido por alguns Geometras, em mais ampla generalidade, entendendo por Methodo da reversão das Series, não a collecção das regras para achar a expressão de x em função de y, sendo y função de x; mas sim a collecção das regras precisas para achar a expressão de qualquer função de x em função de y, sendo y função de x. Trataremos esta doutrina, reduzindo-a á resolução de dois problemas, como praticamos com a antecedente.

PROBLEMA I.

Sendo $y = xfx$, e Fx huma função qualquer de x, desenvolver Fx em função de y.

Solução.

Seja $Fx = \varphi y$; será $Fx = \varphi(xfx)$, e por tanto

$$F. + x\,F.' + x^2\frac{F.''}{1.2|1} + x.^3\frac{F.'''}{1.3|1} + x.^4\frac{F.^{IV}}{1.4|1} + \&c = \varphi. + xf.\varphi.' + x^2 f.'\varphi.' + x.^3\frac{f.''}{1.2|1}\varphi.' + x.^4\frac{f.'''}{1.3|1}\varphi.' + \&c.$$

$$+ x.^2 f.^2\frac{\varphi.''}{1.2|1} + x.^3 f.'^2\frac{\varphi.''}{1.2|1} + x.^4\frac{f.''^2}{1.2|1}\frac{\varphi.''}{1.2|1} + \&c.$$

$$+ x.^3 f.^3\frac{\varphi.'''}{1.3|1} + x^4 f.'^3\frac{\varphi.'''}{1.3|1} + \&c.$$

$$+ x.^4 f.^4\frac{\varphi.^{IV}}{1.4|1} + \&c.$$

$$+ \&c.$$

equação que devendo ter logar qualquer que seja o valor de x, nos dá as seguintes condições.

$$F. = \varphi.$$

$$F.' = f.\varphi.'$$

$$F.'' = f.^2\varphi.'' + 2f.'\varphi.'$$

$$F.''' = f.^3\,\varphi.''' + 3\,f.'^2\,\varphi.'' + 3\,f.''\,\varphi.'$$

$$F.^{IV} = f.^4\,\varphi.^{IV} + 4f.'^3\,\varphi.''' + 6\,f.''^2\,\varphi.'' + 4\,f.'''\,\varphi.'$$

&c.

das quaes se tira

$$\varphi. = F.$$

$$\varphi.' = F.'\,f.^{-1}$$

$$\varphi.'' = F.''f.^{-2} + F.'\,d(f.^{-2})$$

$$\varphi.''' = F.'''f.^{-3} + 2\,F.''\,d(f.^{-3}) + F.'\,d^2(f.^{-3})$$

$$\varphi.^{IV} = F.^{IV}f.^{-4} + 3\,F.'''\,d(f.^{-4}) + 3\,F.''\,d^2(f.^{-4}) + F.'\,d^3(f.^{-4})$$

$$\varphi.^{V} = F.^{V}f.^{-5} + 4\,F.^{IV}\,d(f.^{-5}) + 6\,F.'''\,d^2(f.^{-5}) + 4\,F.''\,d^3(f.^{-5}) + F.'\,d^4(f.^{-5})$$

&c.

Mas he

$$Fx = \varphi. + y\,\varphi.' + y.^2\,\frac{\varphi.''}{1.2|1} + y.^3\,\frac{\varphi.'''}{1.3|1} + y.^4\,\frac{\varphi.^{IV}}{1.4|1} + \&c.$$

logo

$$Fx = F. + y.\,F.'f.^{-1} + \frac{y^2}{1.2|1}\left(F.''f.^{-2} + F.'\,d(f.^{-2})\right) + \frac{y^3}{1.3|1}\left(F.'''f.^{-3} + 2\,F.''\,d(f.^{-3}) + F.'\,d^2(f.^{-3})\right) + \&c.$$

ou mais simplesmente

$$Fx = F. + y.\frac{F.'}{f.} + \frac{y^2}{1.2|1}\,d\left(\frac{F.'}{f.^2}\right) + \frac{y^3}{1.3|1}\,d^2\left(\frac{F.'}{f.^3}\right) + \frac{y^4}{1.4|1}\,d^3\left(\frac{F.'}{f.^4}\right) + \&c.$$

Serie cuja lei he assás patente para poder continuar-se por quantos termos se quizer, e cuja applicação he assás facil, como se verá nos exemplos seguintes.

§. 41°

Exemplo I.

Seja $Fx = e^x$; será $F. = 1$; $F.' = 1$; $F.'' = 1$; $F.''' = 1$; &c. e por tanto

$$e^x = 1 + y f.^{-1} + \frac{y^2}{1.2|1}\left(f.^{-2} + d(f.^{-2})\right) + \frac{y^3}{1.3|1}\left(f.^{-3} + 2\,d(f.^{-3}) + d^2(f.^{-3}) +\right) \&c.$$

Exemplo II.

Seja $Fx = \text{Log.}(a + x)$; será $F. = \text{Log.}\,a$; $F.' = \frac{1}{a}$; $F.'' = -\frac{1}{a^2}$; $F.''' = \frac{1.2|1}{a^3}$; $F.^{IV} = -\frac{1.3|1}{a^4}$; $F.^{V} = \frac{1.4|1}{a^5}$; &c. e por consequencia

$$\text{Log.}(a+x) = \text{Log. } a + \frac{y}{a} f.^{-1} - \frac{1}{2}\frac{y^2}{a^2}\left(f.^{-2} - a\, d(f.^{-2})\right) + \frac{1}{3}\frac{y^3}{a^3}\left(f.^{-3} - a\, d(f.^{-3}) + \frac{1}{2} a^2 d^2(f.^{-3})\right)$$
$$- \frac{1}{4}\frac{y^4}{a^4}\left(f.^{-4} - a\, d(f.^{-4}) + \frac{1}{2} a^2 d^2(f.^{-4}) - \frac{1}{6} a^3 d^3(f.^{-4})\right) + \&c.$$

formula que só não póde ter logar quando for $a = 0$; e por isso cumpre notar que a solução d'este caso depende do desenvolvimento de Log. fx; por quanto, sendo $y = xfx$ he Log. $x = \text{Log. } y - \text{Log. } fx$; mas como Log. fx he huma função duplice de x, forçoso he que primeiro exponhamos o modo pelo qual, sendo $y = xfx$, se póde exprimir Ffx em função de y.

§. 42.º

Seja $y = xfx$; pois que deve ser $\varphi y = Ffx$ será $Ffx = \varphi(xfx)$; e por tanto

$$Ff. + x\,d(Ff.) + \frac{x^2}{1.2|1} a^2(Ff.) + \frac{x^3}{1.3|1} a^3(Ff.) + \&c. = \varphi. + xf.\varphi.' + x^2 f.'\varphi.' + x^3 \frac{f.''}{1.2|1}\varphi.' + x^4 \frac{f.'''}{1.3|1}\varphi.' + \&c.$$
$$+ x^2 f.^2 \frac{\varphi.''}{1.2|1} + x^3 f.'^2 \frac{\varphi.''}{1.2|1} + x^4 \frac{f.''^2}{1.2|1}\frac{\varphi.''}{1.2|1} + \&c.$$
$$+ x^3 f.^3 \frac{\varphi.'''}{1.3|1} + x^4 f.'^3 \frac{\varphi.'''}{1.3|1} + \&c.$$
$$+ x^4 f.^4 \frac{\varphi.^{IV}}{1.4|1} + \&c.$$
$$+ \&c.$$

equação que, devendo ter logar qualquer que seja o valor de x, dá as seguintes condições.

$$Ff. = \varphi.$$
$$d(Ff.) = f.\varphi.'$$
$$d^2(Ff.) = 2f.'\varphi.' + f.^2\varphi.''$$
$$d^3(Ff.) = 3f.''\varphi.' + 3f.'^2\varphi.'' + f^3\varphi.'''$$
$$d^4(Ff.) = 4f.'''\varphi.' + 6f.''^2\varphi.'' + 4f.'^3\varphi.''' + f.^4\varphi.^{IV}$$
$$\&c.$$

das quaes se deduz

$$\varphi. = Ff.$$
$$\varphi.' = d(Ff.)\, f.^{-1}$$
$$\varphi.'' = d^2(Ff.).f.^{-2} + d(Ff.)\,d(f.^{-2})$$
$$\varphi.''' = d^3(Ff.).f.^{-3} + 2d^2(Ff.)\,d(f.^{-3}) + d(Ff.).d^2(f.^{-3})$$

$$\varphi.^{IV} = d^4(Ff.)f.^{-4}) + 3\,d^3(Ff.)\,d(f.^{-4}) + 3\,d^2(Ff.)\,d^2(f.^{-4}) + d(Ff.)\,d^3(f.^{-4})$$

&c.

valores que substituidos no desenvolvimento

$$Ffx = \varphi. + y\,\varphi.' + \frac{y^2}{1.2|1}\varphi.'' + \frac{y^3}{1.3|1}\varphi.''' + \frac{y^4}{1.4|1}\varphi.^{IV} + \&c.$$

o reduzem a

$$Ffx = Ff. + y\,d(Ff.).f.^{-1} + \frac{y^2}{1.2|1}\left(d^2(Ff.).f.^{-2} + d(Ff.).d(f.^{-2})\right) +$$

$$\frac{y^3}{1.3|1}\left(d^3(Ff.).f.^{-3} + 2\,d^2(Ff.).d(f.^{-3}) + d(Ff.).d^2(f.^{-3})\right) +$$

$$\frac{y^4}{1.4|1}\left(d^4(Ff.).f.^{-4} + 3\,d^3(Ff.)\,d(f.^{-4}) + 3\,d^2(Ff.)\,d^2(f.^{-4}) + d(Ff.)\,d^3(f.^{-4})\right) + \&c.$$

ou mais simplesmente a

$$Ffx = Ff. + y\left(\frac{d(Ff.)}{f.}\right) + \frac{y^2}{1.2|1}d\left(\frac{d(Ff.)}{f.^2}\right) + \frac{y^3}{1.3|1}d^2\left(\frac{d(Ff.)}{f.^3}\right) + \frac{y^4}{1.4|1}d^3\left(\frac{d(Ff.)}{f.^4}\right) + \&c.$$

Representando o simbolo funcional F Logarithmo hyperbolico, será

$$Ff. = \text{Log. } f.$$

$$d(Ff.) = f.'f.^{-1}$$

$$d^2(Ff.) = (f.f.'' - f.'^2)f.^{-2}$$

$$d^3(Ff.) = (f.^2f.''' - 3f.f.'f.'' + 2f.'^3)f.^{-3}$$

&c.

valores que substituidos na formula antecedente a reduzem a

$$\text{Log. } fx = \text{Log. } f. - y\,d(f.^{-1}) - \tfrac{1}{2}\frac{y^2}{1.2|1}d^2(f.^{-2}) - \tfrac{1}{3}\frac{y^3}{1.3|1}d^3(f.^{-3}) - \tfrac{1}{4}\frac{y^4}{1.4|1}d^4(f.^{-4}) + \&c.$$

donde rezulta que será

$$\text{Log. } x = \text{Log. } (y.f.^{-1}) + y\,d(f.^{-1}) + \tfrac{1}{2}\frac{y^2}{1.2|1}d^2(f.^{-2}) + \tfrac{1}{3}\frac{y^3}{1.3|1}d^3(f.^{-3}) + \tfrac{1}{4}\frac{y^4}{1.4|1}d^4(f.^{-4}) + \&c.$$

§. 43.º

PROBLEMA II.

Sendo $y = fx$, e Fx huma função qualquer de x, desenvolver Fx em função de y.

Solução.

Seja $Fx = \varphi y$, será

$$Fx = \varphi. + y\,\varphi.' + \frac{y^2}{1.2|1}\,\varphi.'' + \frac{y^3}{1.3|1}\,\varphi.''' + \frac{y^4}{1.4|1}\,\varphi.^{IV} + \&c.$$

ou

$$Fx = \varphi. + fx.\,\varphi.' + f^2x.\,\frac{\varphi.''}{1.2|1} + f^3x.\,\frac{\varphi.'''}{1.3|1} + f^4x.\,\frac{\varphi.^{IV}}{1.4|1} + \&c.$$

e por consequencia

$$\frac{dFx.}{dfx} = \varphi.' + fx.\,\varphi.'' + f^2x.\,\frac{\varphi.'''}{1.2|1} + f^3x.\,\frac{\varphi.^{IV}}{1.3|1} + f^4x.\,\frac{\varphi.^{V}}{1.4|1} + \&c.$$

$$\frac{1}{dfx}\,d\left(\frac{dFx}{dfx}\right) = \varphi.'' + fx.\,\varphi''' + f^2x.\,\frac{\varphi.^{IV}}{1.2|1} + f^3x.\,\frac{\varphi.^{V}}{1.3|1} + f^4x.\,\frac{\varphi.^{VI}}{1.4|1} + \&c.$$

$$\frac{1}{dfx}\,d\left(\frac{1}{dfx}\,d\left(\frac{dFx}{dfx}\right)\right) = \varphi.''' + fx.\,\varphi.^{IV} + f^2x.\,\frac{\varphi.^{V}}{1.2|1} + f^3x.\,\frac{\varphi.^{VI}}{1.3|1} + f^4x.\,\frac{\varphi.^{VII}}{1.4|1} + \&c.$$

&c.

expressões das quaes se deduzem evidentemente os valores de $\varphi.$; $\varphi.'$; $\varphi.''$; &c. substituindo-se em logar de x huma qualquer das raizes da equação $fx = 0$. Representando pois por a huma qualquer das ditas raizes, teremos

$$\varphi. = Fa$$

$$\varphi.' = \frac{dFa}{dfa}$$

$$\varphi.'' = \frac{1}{dfa}\,d\left(\frac{dFa}{dfa}\right)$$

$$\varphi.''' = \frac{1}{dfa}\,d\left(\frac{1}{dfa}\,d\left(\frac{dFa}{dfa}\right)\right)$$

$$\varphi.^{IV} = \frac{1}{dfa}\,d\left(\frac{1}{dfa}\,d\left(\frac{1}{dfa}\,d\left(\frac{dFa}{dfa}\right)\right)\right)$$

&c.

e substituindo-se estes valores na expressão de Fx, ella se reduzirá a

$$Fx = Fa + y\,\frac{dFa}{dfa} + \frac{y^2}{1.2|1}\left(\frac{1}{dfa}\,d\left(\frac{dFa}{dfa}\right)\right) + \frac{y^3}{1.3|1}\left(\frac{1}{dfa}\,d\left(\frac{1}{dfa}\,d\left(\frac{dFa}{dfa}\right)\right)\right) + \&c.$$

formula que satisfazendo aos casos que dependem da resolução da equação $fx = 0$, os quaes se não comprehendem na resolução do Problema I., completa o Methodo da reversão das Series na generalidade, em que o consideramos; ou verdadeiramente o preenche ella só; pois que supondo $a = 0$, se obtem a mesma formula achada em o §. 40.º: advertindo que não tendo naquella $f.$ a mesma significação que tem nesta, se deve ali escrever $f.'$ em logar de $f.$; $\frac{1}{2}f.''$ em logar de $f.'$; $\frac{1}{3}f.'''$ em logar de $f.''$; e em geral $\frac{1}{n+1}f.^{(n+1)}$ em logar de $f.^{n}$.

Esta mesma formula se faz tanto mais digna de atenção, quanto dando-nos o modo de desenvolver huma função Fx em huma Serie ordenada segundo as potencias inteiras de outra função fx da mesma raiz, involve evidentemente em si toda a theoría da transformação das Series; materia que até agora existio abandonada á industria e prespicacia dos Analystas, e que actualmente se apresenta sujeita a huma lei geral.

§. 44.º

A multiplicidade das formulas, e das funções, dando occasião á grandissima variedade de Problemas pertencentes ao Methodo da reversão, de que acabamos de tratar, alguns dos quaes se fizerão notaveis, e adquirirão não pouca celebridade logo que aparecerão pela primeira vez resolvidos, nos convida a aplicar as nossas formulas a algumas questões graves, que em si involvem a resolução d'esses mesmos Problemas, e de alguns outros não menos curiosos nem menos dificeis; seja o primeiro

PROBLEMA.

Desenvolver huma função qualquer de x representada por Fx em função de y, sendo $y = x.fx.\Phi x$

Solução.

Suponhamos $fx.\Phi x = fx$, será $y = x\,fx$, e por tanto teremos (§. 40.)

$$Fx = F. + y\,\frac{F.'}{f.} + \frac{y^2}{1.2.1}\,d\left(\frac{F.'}{f.^2}\right) + \frac{y^3}{1.2.3.1}\,d^2\left(\frac{F.'}{f.^3}\right) + \frac{y^4}{1.2.4.1}\,d^3\left(\frac{F.'}{f.^4}\right) + \&c.$$

mas he $f. = f.\,\Phi.$; logo

$$Fx = F. + y.\frac{F.'}{f.\Phi.} + \frac{y^2}{1.2.1}\,d\left(\frac{F.'}{f.^2\,\Phi.^2}\right) + \frac{y^3}{1.2.3.1}\,d^2\left(\frac{F.'}{f.^3\,\Phi.^3}\right) + \frac{y^4}{1.2.4.1}\,d^3\left(\frac{F.'}{f.^4\,\Phi.^4}\right) + \&c.$$

Esta formula, posto que geral, he inaplicavel aos casos em que $x = 0$ faz $f. = 0$, ou $\Phi. = 0$; bem como áquelles, em que esta suposição torna incalculavel alguma das funções $f.'$; $\Phi.'$; $f.''$; $\Phi.''$; &c., como acontece quando he fx, ou $\Phi x = x^m$, e $m > 1$: E como este caso merece particular atenção nós passamos a trata-lo em o seguinte

§. 45.°

PROBLEMA.

Sendo $y = x^m fx$, e Fx huma função qualquer de x, desenvolver Fx em função de y.

Solução.

A primeira idéa, que se offerece para a resolução d'este Problema, he a de reduzi-lo á resolução do caso geral tratado em o §. 42.° Então representando $x^m fx$ por fx, e por a huma qualquer das raizes da equação $fx = 0$, ou $x^m fx = 0$, se tem

$$Fx = Fa + y\frac{dFa}{dfa} + \frac{y^2}{1.2|1}\left(\frac{1}{dfa}d\left(\frac{dFa}{dfa}\right)\right) + \frac{y^3}{1.3|1}\left(\frac{1}{dfa}d\left(\frac{1}{dfa}d\left(\frac{dFa}{dfa}\right)\right)\right) + \&c.$$

ou, por ser $dfa = \frac{(mfa + a\,dfa)}{a.^{1-m}}$

$$Fx = Fa + y\left(\frac{mfa + a\,dfa}{a^{1-m}}\right)^{-1}\left(dFa + \frac{y}{1.2|1}d\left(\frac{a^{1-m}\,dFa}{mfa + a\,dfa}\right) + \right.$$

$$\left. \frac{y^2}{1.3|1}d\left(\frac{a^{1-m}}{mfa + a\,dfa}d\left(\frac{a^{1-m}\,dFa}{mfa + a\,dfa}\right)\right) + \&c.\right)$$

Serie que sendo a huma das raizes da equação $fx = 0$, se reduz a

$$Fx = Fa + y\frac{(dfa)^{-1}}{a^m}\left(dFa + \frac{y}{1.2|1}d\left(\frac{dFa}{a^m\,dfa}\right) + \frac{y^2}{1.3|1}d\left(\frac{1}{a^m\,dfa}d\left(\frac{dFa}{a^m\,dfa}\right)\right) + \right.$$

$$\left. \frac{y^3}{1.4|1}d\left(\frac{1}{a^m\,dfa}d\left(\frac{1}{a^m\,dfa}d\left(\frac{dFa}{a^m\,dfa}\right)\right)\right) + \&c.\right)$$

mas que, sendo $x = 0$, se apresenta debaixo do aspecto incalculavel. Este grave inconveniente exige que abandonando esta primeira idéa, procuremos outra, a qual isenta d'este embaraço seja aplicavel a todos os casos, e independente do conhecimento de valor algum particular de x. Suponhamos por tanto que seja $x^m = \varphi y$, será $x^m = \varphi(x^m fx)$, e por consequencia

$$x^m = \varphi. + x^m f.\varphi.' + \cdots + x^{2m}\frac{f.^{(m)_1}}{1.^{m|1}}\varphi.' + \cdots + x.^{3m}\frac{f.^{(2m)_1}}{1.^{2m|1}}\varphi.' + \cdots + x.^{4m}\frac{f.^{(3m)_1}}{1.^{3m|1}}\varphi.' + \&c.$$

$$+ x^{2m}f.^2\frac{\varphi.''}{1.^{2|1}} + \cdots + x.^{3m}\frac{f.^{(m)_1}f.^2}{1.^{m|1}}\frac{\varphi.''}{1.^{2|1}} + \cdots + x.^{4m}\frac{f.^{(2m)_1}f.^2}{1.^{2m|1}}\frac{\varphi.''}{1.^{2|1}} + \&c.$$

$$+ x.^{3m} f.^{3} \frac{\varphi.^{III}}{1.^{3|1}} + \cdots + x.^{4m} \frac{f.^{3\,(m)\prime}}{1.^{m|1}} \frac{\varphi.^{III}}{1.^{3|1}} + \&c.$$

$$+ x.^{4m} f.^{4} \frac{\varphi.^{IV}}{1.^{4|1}} + \&c.$$

$$+ \&c.$$

equação que devendo ter logar qualquer que seja o valor de x, dá as seguintes condições.

$$\varphi. = 0$$

$$\varphi.^{I} = f.^{-1}$$

$$\varphi.^{II} = -\frac{f.^{(m)\prime}}{1.^{m|1}} f.^{-3}$$

$$\varphi.^{III} = \left(\frac{f.^{2\,(m)\prime} f.^{(m)\prime}}{1.^{m^2|1^2}} - \frac{f. f.^{(2m)\prime}}{1.^{2m|1}} \right) f.^{-5}$$

$$\varphi.^{IV} = -\left(\frac{f.^{3\,(m)\prime} f.^{2\,(m)\prime} f.^{(m)\prime}}{1.^{m^3|1^3} f.^{3}} - \frac{f.^{3\,(m)\prime} f.^{(2m)\prime}}{1.^{m|1} 1.^{2m|1} f.} - \frac{f.^{(m)\prime} f.^{2\,(2m)\prime}}{1.^{m|1} 1.^{2m|1}} + \frac{f.^{2} f.^{(3m)\prime}}{1.^{3m|1}} \right) . f.^{-7}$$

&c.

Estes valores substituidos no desenvolvimento de φy dão

$$x^{m} = y f.^{-1} - y^{2} \frac{f.^{(m)\prime}}{1.^{m|1}} f.^{-3} + y^{3} \left(\frac{f.^{2\,(m)\prime} f.^{(m)\prime}}{1.^{m^2|1^2}} - \frac{f. f.^{(2m)\prime}}{1.^{2m|1}} \right) f.^{-5} - y^{4} \left(\frac{f.^{3\,(m)\prime} f.^{2\,(m)\prime} f.^{(m)\prime}}{1.^{m^3|1^3} f.^{3}} - \frac{f.^{3\,(m)\prime} f.^{(2m)\prime}}{1.^{m|1} 1.^{2m|1} f.} \right.$$

$$\left. - \frac{f.^{(m)\prime} f.^{(2m)\prime}}{1.^{m|1} 1.^{2m|1}} + \frac{f.^{2} f.^{(3m)\prime}}{1.^{3m|1}} \right) f.^{-7} + \&c.$$

Mas supondo $Fx = \Phi x^{m}$, teremos $\Phi(x^{m}) = \Phi(y f y)$, e por tanto

$$F x = \Phi. + y f. \Phi.' + y^{2} f.' \Phi.' + y^{3} \frac{f.''}{1.^{2|1}} \Phi.' + y^{4} \frac{f.'''}{1.^{3|1}} \Phi.' + \&c.$$

$$+ y^{2} f.^{2} \frac{\Phi.''}{1.^{2|1}} + y^{3} f.^{2\prime} \frac{\Phi.''}{1.^{2|1}} + y^{4} \frac{f^{2\prime\prime}}{1.^{2|1}} \frac{\Phi.''}{1.^{2|1}} + \&c.$$

$$+ y^{3} f.^{3} \frac{\Phi.'''}{1.^{3|1}} + y^{4} f.^{3\prime} \frac{\Phi.'''}{1.^{3|1}} + \&c.$$

$$+ y^{4} f.^{4} \frac{\Phi.^{IV}}{1.^{4|1}} + \&c.$$

$$+ \&c.$$

De ser $Fx = \Phi x^{m}$ se segue ser

$$\Phi. = F.$$

$$\Phi.' = \frac{F.^{(m)_{,}}}{1.^{m|1}}$$

$$\frac{\Phi.''}{1.^{2|1}} = \frac{F.^{(2m)_{,}}}{1.^{2m|1}}$$

$$\frac{\Phi.'''}{1.^{3|1}} = \frac{F.^{(3m)_{,}}}{1.^{3m|1}}$$

&c.

e por consequencia feitas as substituições convenientes se tem finalmente

$$Fx = F. + y\,f.\frac{F.^{(m)_{,}}}{1.^{m|1}} + y^2\left(f.'\frac{F.^{(m)_{,}}}{1.^{m|1}} + f.^2\frac{F.^{(2m)_{,}}}{1.^{2m|1}}\right) + y^3\left(\frac{f.''}{1.^{2|1}}\frac{F.^{(m)_{,}}}{1.^{m|1}} + 2\,f.\,f.'\frac{F.^{(2m)_{,}}}{1.^{2m|1}} + f.^3\frac{F.^{(3m)_{,}}}{1.^{3m|1}}\right)$$

$$+ y^4\left(\frac{f.'''}{1.^{3|1}}\frac{F.^{(m)_{,}}}{1.^{m|1}} + \left(f.'^2 + f.\,f.''\right)\frac{F.^{(2m)_{,}}}{1.^{2m|1}} + 3\,f.^2\,f.'\frac{F.^{(3m)_{,}}}{1.^{3m|1}} + f.^4\frac{F.^{(4m)_{,}}}{1.^{4m|1}}\right) + \&c.$$

formula na qual só falta substituir em logar de f.; f.'; f.''; &c. os seus valores: mas he

$$fy = f.^{-1} - y\,\frac{f.^{(m)_{,}}}{1.^{m|1}}f.^{-3} + y^2\left(\frac{f.^{2(m)_{,}}\,f.^{(m)_{,}}}{1.^{m^2|_1{}^2}f.} - \frac{f.\,f.^{(2m)_{,}}}{1.^{2m|1}}\right)f.^{-5} - y^3\left(\frac{f.^{3(m)_{,}}\,f.^{2(m)_{,}}\,f.^{(m)_{,}}}{1.^{m^3|_1{}^3}f.^3} - \frac{f.^{3(m)_{,}}\,f.^{(2m)_{,}}}{1.^{m|1}\,1.^{2m|1}f.}\right.$$

$$\left. - \frac{f.^{(m)_{,}}\,f.^{(2m)_{,}}}{1.^{m|1}\,1.^{2m|1}} + \frac{f.^2\,f.^{(3m)_{,}}}{1.^{3m|1}}\right)f.^{-7} + \&c.$$

Logo

$$f. = f.^{-1}$$

$$f.' = -\frac{f.^{(m)_{,}}}{1.^{m|1}}f.^{-3}$$

$$f.'' = 1.^{2|1}\left(\frac{f.^{2(m)_{,}}\,f.^{(m)_{,}}}{1.^{m^2|_1{}^2}f.} - \frac{f.\,f.^{(2m)_{,}}}{1.^{2m|1}}\right)f.^{-5}$$

$$f.''' = -1.^{3|1}\left(\frac{f.^{3(m)_{,}}\,f.^{2(m)_{,}}\,f.^{(m)_{,}}}{1.^{m^3|_1{}^3}f.^3} - \frac{f.^{3(m)_{,}}\,f.^{(2m)_{,}}}{1.^{m|1}\,1.^{2m|1}f.} - \frac{f.^{(m)_{,}}\,f.^{(2m)_{,}}}{1.^{m|1}\,1.^{2m|1}} + \frac{f.^2\,f.^{(3m)_{,}}}{1.^{3m|1}}\right)f.^{-7}$$

&c.

e por tanto

$$Fx = F. + y\,f.^{-1}\frac{F.^{(m)_{,}}}{1.^{m|1}} + y^2\,f.^{-2}\left(\frac{f.^{2(m)_{,}}\,F.^{(m)_{,}}}{1.^{m^2|_1{}^2}f.} - \frac{F.^{(2m)_{,}}}{1.^{2m|1}}\right) + y^3\,f.^{-3}\left(\left(\frac{f.^{2(m)_{,}}\,f.^{(m)_{,}}}{1.^{m^2|_1{}^2}f.^3} - \frac{f.^{(2m)_{,}}}{1.^{2m|1}f.}\right)\frac{F.^{(m)_{,}}}{1.^{m|1}}\right.$$

$$-2\frac{f.^{(m)_1}}{1.^{m|1}f.}\frac{F.^{(2m)_1}}{1.^{2m|1}}+\frac{F.^{(3m)_1}}{1.^{3m|1}}\Big)-y^4f.^{-4}\Big(\Big(\frac{f.^{3(m)_1}f.^{(m)_1}f.^{(m)_1}}{1.^{m|1}1.^{1}f.^{6}}-\frac{f.^{3(m)_1}f.^{(2m)_1}}{1.^{m|1}1.^{2m|1}f.^{4}}-\frac{f.^{(m)_1}f.^{(2m)_1}}{1.^{m|1}1.^{2m|1}f.^{3}}$$

$$+\frac{f.^{(3m)_1}}{1.^{3m|1}f.^{3}}\Big)\frac{F.^{(m)_1}}{1.^{m|1}}-\Big(\frac{f.^{2(m)_1}}{1.^{m^2|1}1.^{2}f.^{5}}+2\Big(\frac{f.^{2(m)_1}f.^{(m)_1}}{1.^{m^2|1}1.^{2}f.^{5}}-\frac{f.^{(2m)_1}}{1.^{2m|1}f.^{3}}\Big)\Big)\frac{F.^{(2m)_1}}{1.^{2m|1}}-3\frac{f.^{(m)_1}}{1.^{m|1}f.^{4}}\frac{F.^{(3m)_1}}{1.^{3m|1}}-\frac{F.^{(4m)_1}}{1.^{4m|1}}\Big)$$

$$+\ \&c.$$

formula mais complicada na aparencia do que na realidade; pois que a sua lei he assás patente, ainda mesmo depois de explicados os seus termos até ao ponto em que os apresento aqui desenvolvidos.

§. 46.º

PROBLEMA.

„ Sendo $y=x\overset{m}{\varphi}x$, desenvolver Fx em função de y. „

Solução.

Seja $\overset{m}{\varphi}x=\Phi x$, será

$$\varphi.^{m}+x\,\varphi.^{m}+x^2\frac{\varphi.^{m}}{1.^{2|1}}+x^3\frac{\varphi.^{m}}{1.^{3|1}}+\&c.=\Phi.+x.\Phi.'+x^2\frac{\Phi.''}{1.^{2|1}}+x.^3\frac{\Phi.'''}{1.^{3|1}}+\&c.$$

equação que devendo ter logar qualquer que seja o valor de x, dá as seguintes condições:

$$\Phi.=\varphi.^{m}$$

$$\Phi.'=m\,\varphi.^{m-1}\varphi.'$$

$$\Phi.''=m\,\varphi.^{m-1}\varphi.''+m^{2|-1}\varphi.^{m-2}\varphi.'^{2}$$

$$\Phi.'''=m\,\varphi.^{m-1}\varphi.'''+3\,m.^{2|-1}\varphi.^{m-2}\varphi.'\varphi.''+m.^{3|-1}\varphi.^{m-3}\varphi.'^{3}$$

$$\Phi.^{IV}=m\,\varphi.^{m-1}\varphi.^{IV}+4.m.^{2|-1}\varphi.^{m-2}(\varphi.'\varphi.'''+\tfrac{3}{4}\varphi.''^{2})+6m.^{3|-1}\varphi.^{m-3}\varphi.'^{2}\varphi.''+m.^{4|-1}\varphi.^{m-4}\varphi.'^{4}$$

&c.

mas he (§. 40.)

$$Fx=F.+y\frac{F.'}{\Phi.}+\frac{y^2}{1.^{2|1}}d\Big(\frac{F.'}{\Phi.^{2}}\Big)+\frac{y^3}{1.^{3|1}}d^2\Big(\frac{F.'}{\Phi.^{3}}\Big)+\frac{y^4}{1.^{4|1}}d^3\Big(\frac{F.'}{\Phi.^{4}}\Big)+\&c.$$

Logo

$$Fx=F.+y\frac{F.'}{\varphi.^{m}}+\frac{y^2}{1.^{2|1}}d\Big(\frac{F.'}{\varphi.^{2m}}\Big)+\frac{y^3}{1.^{3|1}}d^2\Big(\frac{F.'}{\varphi.^{3m}}\Big)+\frac{y^4}{1.^{4|1}}d^3\Big(\frac{F.'}{\varphi.^{4m}}\Big)+\&c.$$

§. 47.º

Sendo $m = -1$, a formula antecedente se reduz a

$$Fx = F. + y\,\varphi.F.' + \frac{y^2}{1.2|1}\,d(\varphi.^2 F.') + \frac{y^3}{1.3|1}\,d^2(\varphi.^3 F.') + \frac{y^4}{1.4|1}\,d^3(\varphi.^4 F.') + \&c.$$

expressão de que faço especial mensão por que em si encerra o celebre Theorema publicado por de La Grange nas Memorias de Berlin para o anno de 1768, o qual tem sido objecto da admiração e meditações de diversos outros Geometras, e que Wronski reputa a maior das suas descobertas na Technia da Algorithmia.

O Theorema de de La Grange rezulta da solução do seguinte

PROBLEMA.

Dada a equação $a - x + y\,\varphi\,x = 0$, e sendo Fx huma função qualquer de x, desenvolver Fx em função de y.

Ora esta equação póde escrever-se assim $y = \frac{x-a}{\varphi\,x}$; e supondo-se $x - a = z$ ella se converte em

$$y = z.\,\varphi.^{-1}(a + z)$$

ou supondo $\varphi(a + z) = \Phi z$, em

$$y = z\,\Phi^{-1} z.$$

E representando por Fx huma função qualquer de z, e comparando com a formula antecedente, teremos

$$Fz = F. + y.\,\Phi.\,F.' + \frac{y^2}{1.2|1}\,d(\Phi.^2 F.') + \frac{y^3}{1.3|1}\,d^2(\Phi.^3 F.') + \frac{y^4}{1.4|1}\,d^3(\Phi.^4 F.') + \&c.$$

mas $z = 0$ faz $\Phi. = \varphi\,a$, e $x = a$; e como para ser $Fz = Fx$ he necessario que seja

$$Fz = F(a + z),$$

seguesse que será $F. = Fa$; e por consequencia

$$Fx = Fa + y.\,\varphi\,a.\,F'a + \frac{y^2}{1.2|1}\,d(\varphi^2\,a.\,F'a) + \frac{y^3}{1.3|1}\,d^2(\varphi^3\,a.\,F'a) + \&c.$$

formula em que consiste o Theorema de La Grange.

§. 48.º

Sendo $y = 1$, será

$$Fx = Fa + \varphi a . F'a + \frac{1}{1.2|1} d(\varphi^2 a . F'a) + \frac{1}{1.3|1} d^2(\varphi^3 a . F'a) + \frac{1}{1.4|1} d^3(\varphi^4 a . F'a) + \&c.$$

a expressão de huma função qualquer de x considerado como raiz da equação

$$a - x + \varphi x = 0$$

§. 49.º

Sendo $Fz = z$, será $F.=0$, e $F.'=1$; e por tanto

$$x = y\Phi. + \frac{y^2}{1.2|1} d(\Phi.^2) + \frac{y^3}{1.3|1} d^2(\Phi.^3) + \frac{y^4}{1.4|1} d^3(\Phi.^4) + \&c.$$

ou

$$x = a + y\varphi a + \frac{y^2}{1.2|1} d(\varphi^2 a) + \frac{y^3}{1.3|1} d^2(\varphi^3 a) + \frac{y^4}{1.4|1} d^3(\varphi^4 a) + \&c.$$

e

$$\varphi x = \varphi a + \frac{y}{1.2|1} d(\varphi^2 a) + \frac{y^2}{1.3|1} d^2(\varphi^3 a) + \frac{y^3}{1.4|1} d^3(\varphi^4 a) + \&c.$$

§. 50.º

Até aquí temos resolvido problemas que não dependem senão do desenvolvimento das funções dupleces; passemos a tratar de alguns, que exigem o desenvolvimento das funções tripleces.

PROBLEMA.

Sendo $x = f(a + y\varphi x)$, desenvolver φx em função de y.

SOLUÇÃO.

Seja $\varphi x = fy$, será $\varphi x = \varphi f(a + yfy)$; mas he

$$fy = f. + yf.' + \frac{y^2}{1.2|1} f.'' + \frac{y^3}{1.3|1} f.''' + \frac{y^4}{1.4|1} f.^{IV} + \&c.$$

e

$$\varphi f(a + yfy) = \varphi fa + yf.\, d(\varphi fa) + y^2 f.' d(\varphi fa) + y^3 \frac{f.''}{1.2|1} d(\varphi fa) + y^4 \frac{f.'''}{1.3|1} d(\varphi fa) + \&c.$$

$$+ y^2 f.^2 \frac{d^2(\varphi fa)}{1.2|1} + y^3 f.'^2 \frac{d^2(\varphi fa)}{1.2|1} + y^4 \frac{f.''^2}{1.2|1} \frac{d^2(\varphi fa)}{1.2|1} + \&c.$$

$$+ y^3 f.^3 \frac{d^3(\varphi fa)}{1.3|1} + y^4 f.'^3 \frac{d^3(\varphi fa)}{1.3|1} + \&c.$$

$$+ y^4 f.^4 \frac{d^4(\varphi f a)}{1.4|1} + \&c.$$

$$+ \&c.$$

desenvolvimento que devendo ser identico com o precedente dá as seguintes equações de condição.

$$f. = \varphi f a$$

$$f.' = f. d(\varphi f a)$$

$$\frac{f.''}{1.2|1} = f.' d(\varphi f a) + f.^2 \frac{d^2(\varphi f a)}{1.2|1}$$

$$\frac{f.'''}{1.3|1} = \frac{f.''}{1.2|1} d(\varphi f a) + 2 f. f.' \frac{d^2(\varphi f a)}{1.2|1} + f.^3 \frac{d^3(\varphi f a)}{1.3|1}$$

$$\frac{f.^{IV}}{1.4|1} = \frac{f.'''}{1.3|1} d(\varphi f a) + 3 \left(f. f.'' + f.'^2 \right) \frac{d^2(\varphi f a)}{1.2|1} + 3 f.^2 f.' \frac{d^3(\varphi f a)}{1.3|1} + f.^4 \frac{d^4(\varphi f a)}{1.4|1}$$

das quaes se deduz

$$f. = \varphi f a$$

$$f.' = \tfrac{1}{2} d(\varphi^2 f a)$$

$$f.'' = \tfrac{1}{3} d^2(\varphi^3 f a)$$

$$f.''' = \tfrac{1}{4} d^3(\varphi^4 f a)$$

$$f.^{IV} = \tfrac{1}{5} d^4(\varphi^5 f a)$$

&c.

donde se segue que he

$$\varphi x = \varphi f a + \frac{y}{1.2|1} d(\varphi^2 f a) + \frac{y^2}{1.3|1} d^2(\varphi^3 f a) + \frac{y^3}{1.4|1} d^3(\varphi^4 f a) + \frac{y^4}{1.5|1} d^4(\varphi^5 f a) + \&c.$$

§. 51.º

PROBLEMA.

Sendo $x = f(a + y \varphi x)$, desenvolver x em função de y.

Solução.

Sendo, como supozemos na solução do Problema antecedente $\varphi x = f y$, será $x = f(a + y f y)$; e por consequencia

$$x = f a + y f. f' a + y^2 f.' f' a + y^3 \frac{f.''}{1.2|1} f' a + y^4 \frac{f.'''}{1.3|1} f' a + \&c.$$

$$+ y^2 f.^2 \frac{f'' a}{1.2|1} + y^3 f.'^2 \frac{f'' a}{1.2|1} + y^4 \frac{f.'^2}{1.2|1} \frac{f'' a}{1.2|1} + \&c.$$

$$+y^3\,f.^3\,\frac{f.'''a}{1.3|1}+y.^4\,f.^3\,\frac{f'''a}{1.3|1}+\&c.$$

$$+y^4\,f.^4\,\frac{f^{IV}a}{1.4|1}+\&c.$$

$$+\&c.$$

expressão, a qual, substituindo por f.; f.'; f.''; &c. os seus competentes valores calculados em o §. antecedente, se reduz a

$$x=fa+y.\varphi fa.f'a.+\frac{y^2}{1.2|1}d\left(\varphi^2 fa.f'a\right)+\frac{y^3}{1.3|1}d^2\left(\varphi^3 fa.f'a\right)+\&c.$$

§. 52.°

PROBLEMA.

Sendo $x=f(a+y\varphi x)$, e Fx huma função qualquer de x, desenvolver Fx em função de y.

Solução.

Seja como nos § §. antecedentes $\varphi x=fy$, será $Fx=Ff(a+yfy)$, e por tanto

$$Fx=Ffa+y\,f.\,d\,Ffa+y^2\,f.'\,d\,Ffa+y^3\,\frac{f.''}{1.2|1}\,d\,Ffa+y^4\,\frac{f.'''}{1.3|1}\,d\,Ffa+\&c.$$

$$+y^2\,f.^2\,\frac{d^2\,Ffa}{1.2|1}+y.^3\,f.^2\,\frac{d^2\,Ffa}{1.2|1}+y^4\,\frac{f.''^2}{1.2|1}\,\frac{d^2\,Ffa}{1.2|1}+\&c.$$

$$+y^3\,f.^3\,\frac{d^3\,Ffa}{1.3|1}+y^4\,f.'^3\,\frac{d^3\,Ffa}{1.3|1}+\&c.$$

$$+y^4\,f.^4\,\frac{d^4\,Ffa}{1.4|1}+\&c.$$

$$+\&c.$$

expressão a qual substituindo-se por f.; f.'; f.''; &c. os seus valores antecedentemente determinados, se converte em

$$Fx=Ffa+y.\varphi fa.\,d\,Ffa+\frac{y^2}{1.2|1}d\left(\varphi^2 fa.d\,Ffa\right)+\frac{y^3}{1.3|1}d^2\left(\varphi^3 fa.d\,Ffa\right)+\&c.$$

formula que concorda perfeitamente com a que M. La Laplace publicou em as Memorias da Academia Real das Sciencias de Pariz do anno de 1777, e da qual a publicada por de La Grange no anno de 1768 he hum caso particular, bem que Wronski a considere como a expressão de huma lei Algorithmica, e não faça a mesma honra á do Illustre Laplace.

§. 53.°

A suposição de $y = 1$ reduz o valor de x achado em o §. 51.° a

$$x = fa + \varphi fa . f'a + \frac{d(\varphi^2 fa . f'a)}{1.2|1} + \frac{d^2(\varphi^3 fa . f'a)}{1.3|1} + \frac{d^3(\varphi^4 fa . f'a)}{1.4|1} + \&c.$$

e o valor de Fx achado em o §. antecedente a

$$Fx = Ffa + \varphi fa . dFfa + \frac{d(\varphi^2 fa . dFfa)}{1.2|1} + \frac{d^2(\varphi^3 fa . dFfa)}{1.3|1} + \frac{d^3(\varphi^4 fa . dFfa)}{1.4|1} + \&c.$$

valores dos quaes o primeiro denota huma raiz da equação

$$x = f(a + \varphi x)$$

e o segundo huma função qualquer da mesma raiz.

§. 54.°

A mesma suposição de $y = 1$, reduz as expressões de x, e φx achadas em o §. 49. a

$$x = a + \varphi a + \frac{d(\varphi^2 a)}{1.2|1} + \frac{d^2(\varphi^3 a)}{1.3|1} + \frac{d^3(\varphi^4 a)}{1.4|1} + \frac{d^4(\varphi^5 a)}{1.5|1} + \&c.$$

e

$$\varphi x = \varphi a + \frac{d(\varphi^2 a)}{1.2|1} + \frac{d^2(\varphi^3 a)}{1.3|1} + \frac{d^3(\varphi^4 a)}{1.4|1} + \frac{d^4(\varphi^5 a)}{1.5|1} + \&c.$$

a primeira das quaes denota huma raiz da equação

$$a - x + \varphi x = 0$$

e a segunda a função φ d'essa raiz.

§. 55.°

Independentemente das considerações indicadas em os dois §.§. antecedentes, as quaes nos mostrão assás evidentemente que o Methodo da reversão das Series conduz ao conhecimento das raizes de certas equações, he facil de ver que o mesmo Methodo deve ser sufficiente para a resolução geral, senão exactamente, ao menos por aproximação. E com efeito sendo $\varphi u = y$ he claro que se representar-mos por t qualquer dos estados de grandeza, ou valores especiaes de u, que fazem $y = 0$, a equação $\varphi u = y$ se converterá em $\varphi t = 0$, e cada hum d'esses valores de t será huma raiz da equação $\varphi t = 0$. Ora se nós pelo Methodo da reversão das Series exprimirmos u em função de y, ou em função de φu, a substitui-

ção de o em logar de y converterá a expressão geral de u na expressão particular de t; e por tanto d'ella se derivará por este modo o conhecimento pelo menos de huma raiz da equação geral $\varphi t = 0$. Seja pois $\varphi u = y$, e $\varphi t = 0$; se representarmos por z a diferença entre t, e u, teremos $z = t - u$, e por consequencia $\varphi u = \varphi(t - z)$: mas he

$$\varphi(t-z) = \varphi t - z\, d(\varphi t) + z^2 \frac{d^2(\varphi t)}{1.2|1} - z^3 \frac{d^3(\varphi t)}{1.3|1} + z^4 \frac{d^4(\varphi t)}{1.4|1} - \&c.$$

ou por ser $\varphi t = 0$

$$\varphi(t-z) = -z\left(d(\varphi t) - z\frac{d^2(\varphi t)}{1.2|1} + z^2\frac{d^3(\varphi t)}{1.3|1} - z^3\frac{d^4(\varphi t)}{1.4|1} + \&c.\right)$$

Logo representando por $-\mathrm{f}\,z$ a Serie que na expressão antecedente multiplica $-z$, será $y = z\,\mathrm{f}\,z$; e por tanto querendo-se z expressado em função de y, ou de φu, suporemos $z = \Phi y$, e será

$$\begin{aligned} z = \Phi. &+ z\,\mathrm{f}.\,\Phi.' + z^2\,\mathrm{f}.'\,\Phi.' + z^3\frac{\mathrm{f}.''}{1.2|1}\Phi.' + z^4\frac{\mathrm{f}.'''}{1.3|1}\Phi.' + \&c. \\ &+ z^2\,\mathrm{f}.^2\frac{\Phi.''}{1.2|1} + z^3\,\mathrm{f}.^2{}'\frac{\Phi.''}{1.2|1} + z^4\frac{\mathrm{f}.^2{}''}{1.2|1}\frac{\Phi.''}{1.2|1} + \&c. \\ &+ z^3\,\mathrm{f}.^3\frac{\Phi.'''}{1.3|1} + z^4\,\mathrm{f}.^3{}'\frac{\Phi.'''}{1.3|1} + \&c. \\ &+ z^4\,\mathrm{f}.^4\frac{\Phi.^{IV}}{1.4|1} + \&c. \\ &+ \&c. \end{aligned}$$

equação que devendo ter logar qualquer que seja o valor de z, dá

$$\begin{aligned} \Phi. &= 0. \\ \Phi.' &= \overline{\mathrm{f}.}^{1} \\ \Phi.'' &= d(\overline{\mathrm{f}.}^{2}) \\ \Phi.''' &= d^2(\overline{\mathrm{f}.}^{3}) \\ \Phi.^{IV} &= d^3(\overline{\mathrm{f}.}^{4}) \\ &\&c. \end{aligned}$$

substituindo estes valores no desenvolvimento de

$$z = \Phi. + y\,\Phi.' + y^2\frac{\Phi.''}{1.2|1} + y^3\frac{\Phi.'''}{1.3|1} + y^4\frac{\Phi.^{IV}}{1.4|1} + \&c.$$

se tem

$$z = \varphi u.\,\overline{\mathrm{f}.}^{1} + \frac{\varphi^2 u}{1.2|1}\,d(\overline{\mathrm{f}.}^{2}) + \frac{\varphi^3 u}{1.3|1}\,d^2(\overline{\mathrm{f}.}^{3}) + \frac{\varphi^4 u}{1.4|1}\,d^3(\overline{\mathrm{f}.}^{4}) + \&c.$$

expressão na qual só falta substituir em logar de $\overline{\mathrm{f}.}^{1}$; $d(\overline{\mathrm{f}.}^{2})$; $d^2(\overline{\mathrm{f}.}^{3})$, &c. os seus respectivos valores. E pois que he

$$fz = -d\varphi t + z\frac{d^2\varphi t}{1.2|1} - z^2\frac{d^3\varphi t}{1.3|1} + z^3\frac{d^4\varphi t}{1.4|1} - \&c.$$

d'aqui se deduz

$$f. = -d\varphi t$$
$$f.' = \tfrac{1}{2}d^2\varphi t$$
$$f.'' = -\tfrac{1}{3}d^3\varphi t$$
$$f.''' = \tfrac{1}{4}d^4\varphi t$$
$$\&c.$$

expressões, as quaes, advertindo que he $t = u$ quando $z = 0$, se reduzem a

$$f. = -d\varphi u$$
$$f.' = \tfrac{1}{2}d^2\varphi u$$
$$f.'' = -\tfrac{1}{3}d^3\varphi u$$
$$f.''' = \tfrac{1}{4}d^4\varphi u$$
$$\&c.$$

e que substituidas nos seus competentes logares dão finalmente

$$z = -\varphi u.\frac{1}{d\varphi u} - \frac{\varphi^2 u}{1.2|1}d\left(\frac{1}{(d\varphi u)^2}\right) - \frac{\varphi^3 u}{1.3|1}d^2\left(\frac{1}{(d\varphi u)^3}\right) - \frac{\varphi^4 u}{1.4|1}d^3\left(\frac{1}{(d\varphi u)^4}\right) - \&c.$$

Esta formula coincide com a que Euler achou por outro caminho em o Capitulo IX. da 2.ª Parte das suas Instituições de Calculo Differencial, e exprimindo a diferença entre t e u nos mostra o gráo de aproximação de qualquer valor suposto de u relativamente ao valor mais proximo de t, tendo de mais a singularidade, em que Euler talvez não advertio, de poder dar-nos tambem o valor de t; por quanto $u = 0$ faz $z = t$, e da substituição destes valores rezulta

$$z = -\varphi.\left(\frac{1}{d\varphi.} + \frac{\varphi.}{1.2|1}d\left(\frac{1}{(d\varphi.)^2}\right) + \frac{\varphi.^2}{1.3|1}d^2\left(\frac{1}{(d\varphi.)^3}\right) + \frac{\varphi.^3}{1.4|1}d^3\left(\frac{1}{(d\varphi.)^4}\right) + \&c.\right)$$

expressão geral de huma qualquer das raízes da equação $\varphi t = 0$.

§. 56º.

Assim como as doutrinas da reversão e da transformação das Series se acham incluidas na Theorica geral do desenvolvimento das funções, assim tambem a da substituição das Series hnmas em outras se acha comprehendida na mesma lei geral. Ella se reduz com efeito ao desenvolvimento das funções multiplices, como passamos a mostrar. Sendo dadas, por exemplo, as trez seguintes Series

$$x = A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4 + \&c.$$
$$y = B'x + C'x^2 + D'x^3 + E'x^4 + F'x^5 + \&c.$$
$$x = B''u + C''u^2 + D''u^3 + E''u^4 + F''u^5 + \&c.$$

pedir que z se expresse em huma Serie ordenada segundo as potencias inteiras de u, reduz-se a pedir que sendo $z = Fy$; $y = xfx$, e $x = u\varphi u$, se expresse z em função de u ordenada segundo as potencias inteiras da raiz u: mas a substituição successiva dos valores de x, e y faz

$$z = F\left(u\varphi u.f(u\varphi u)\right)$$

e por tanto reduz a questão a efeituar o desenvolvimento d'esta função triplice. Considerando $u\varphi u$ como huma simples variavel teremos (§. 20.)

$$z = F. + u\varphi u.f.F.' + u^2\varphi^2 u f.' F.' + u^3\varphi^3 u \frac{f.''}{1.2|1} F.' + u^4\varphi^4 u \frac{f.'''}{1.3|1} F.' + \&c.$$
$$+ u^2\varphi^2 u f.^2 \frac{F.''}{1.2|1} + u^3\varphi^3 u f.^{2'} \frac{F.''}{1.2|1} + u^4\varphi^4 u \frac{f.^{2''}}{1.2|1} \frac{F.''}{1.2|1} + \&c.$$
$$+ u^3\varphi^3 u f.^3 \frac{F.'''}{1.3|1} + u^4\varphi^4 u f.^{3'} \frac{F.'''}{1.3|1} + \&c.$$
$$+ u^4\varphi^4 u f.^4 \frac{F.^{IV}}{1.4|1} + \&c.$$
$$+ \&c.$$

mas substituindo em logar das funções φu; $\varphi^2 u$; $\varphi^3 u$; &c. os seus particulares desenvolvimentos esta expressão se converte em

$$z = F. + u\varphi.f.F.' + u^2\varphi.' f. F.' + u^3 \frac{\varphi.''}{1.2|1} f. F.' + u^4 \frac{\varphi.'''}{1.3|1} f. F.' + \&c.$$
$$+ u^2\varphi.^2 f.' F.' + u^3 \varphi.^{2'} f.' F.' + u^4 \frac{\varphi.^{2''}}{1.2|1} f.' F.' + \&c.$$
$$+ u^3 \varphi.^3 \frac{f.''}{1.2|1} F.' + u^4 \varphi.^{3'} \frac{f.''}{1.2|1} F.' + \&c.$$
$$+ u^4 \varphi.^4 \frac{f.'''}{1.3|1} F.' + \&c.$$
$$+ u^2\varphi.^2 f.^2 \frac{F.''}{1.2|1} + u^3\varphi.^{2'} f.^2 \frac{F.''}{1.2|1} + u^4 \frac{\varphi.^{2''}}{1.2|1} f.^2 \frac{F.''}{1.2|1} + \&c.$$
$$+ u^3\varphi.^3 f.^{2'} \frac{F.''}{1.2|1} + u^4 \varphi.^{3'} f.^{2'} \frac{F.''}{1.2|1} + \&c.$$
$$+ u^4 \varphi.^4 \frac{f.''}{1.2|1} \frac{F.''}{1.2|1} + \&c.$$
$$+ u^3 \varphi.^3 f.^3 \frac{F.'''}{1.3|1} + u^4 \varphi.^{3'} f.^3 \frac{F.'''}{1.3|1} + \&c.$$
$$+ u^4 \varphi.^4 f.^{3'} \frac{F.'''}{1.3|1} + \&c.$$
$$+ u^4 \varphi.^4 f.^4 \frac{F.^{IV}}{1.4|1} + \&c.$$
$$+ \&c.$$

ou em

$$z = F. + u\,\varphi.f.\,F.'$$
$$+ u^2\left(\varphi.'f.\,F.' + \varphi.^2\left(f.'F.' + f.^2\,\frac{F.''}{1.2|1}\right)\right)$$
$$+ u^3\left(\frac{\varphi.''}{1.2|1}f.\,F.' + 2\,\varphi.\,\varphi.'\left(f.'F.' + f.^2\,\frac{F.''}{1.2|1}\right) + \varphi.^3\left(\frac{f.''}{1.2|1}F.' + 2\,f.f.'\,\frac{F.''}{1.2|1} + f.^3\,\frac{F.'''}{1.3|1}\right)\right)$$
$$+ u^4\left(\frac{\varphi.'''}{1.3|1}f.\,F.' + \left(\varphi.\,\varphi.'' + \varphi.'^2\right)\left(f.'F.' + f.^2\,\frac{F.''}{1.2|1}\right) + 3\,\varphi.^2\,\varphi.'\left(\frac{f.''}{1.2|1}F.' + 2\,f.f.'\,\frac{F.''}{1.2|1} + f.^3\,\frac{F.'''}{1.3|1}\right)\right.$$
$$\left. + \varphi.^4\left(\frac{f.'''}{1.3|1}F.' + \left(f.f.'' + f.'^2\right)\frac{F.''}{1.2|1} + 3f.^2f.'\frac{F.'''}{1.3|1} + f.^4\,\frac{F.^{IV}}{1.4|1}\right)\right)$$
$$+ \&c.$$

Querendo substituir em logar das funções $F.$; $F.'$; $F.''$; &c. $f.$; $f.'$; $f.''$; &c. φ; φ'; $\varphi.''$; &c. os seus valores expressos nos coeficientes dos termos das Series propostas, devemos advertir que he

$F. = A$ ---------- «	« ---------- «	«
$F.' = B$ ----------	$f. = B.'$ ----------	$\varphi. = B.''$
$F.'' = 1.2\|1\ C$ -------	$f.' = C.'$ ----------	$\varphi.' = C.''$
$F.''' = 1.3\|1\ D$ -------	$f.'' = 1.2\|1\ D.'$ -------	$\varphi.'' = 1.2\|1\ D.''$
$F.^{IV} = 1.4\|1\ E$ -------	$f.''' = 1.3\|1\ E.'$ -------	$\varphi.''' = 1.3\|1\ E.''$
&c.	&c.	&c.

e que por tanto he

$$z = A + u.\,B.\,B.'\,B.''$$
$$+ u^2\left(B.\,B.'\,C'' + 2\,B.''^2\left(B.\,C' + B.'^2C\right)\right)$$
$$+ u^3\left(B.B.'\,D.'' + 2\,B.''\,C.''\left(B.\,C' + B.'^2C.\right) + B.''^3\left(B.\,D.' + 2\,B.'C.'C + B'^3D\right)\right)$$
$$+ u^4\left(B.\,B.'E'' + \left(2\,B''D'' + C''^2\right)\left(B.\,C' + B.'^2C\right) + 3\,B.''^2C''\left(B.\,D' + 2\,B.'C.'C.\right.\right.$$
$$\left.\left. + B.'^3D\right) + B.''^4\left(B.\,E' + \left(2\,B.'\,D.' + C.'^2\right)C + 3\,B.'^2C.'\,D + B.'^4E\right)\right)$$
$$+ \&c.$$

§. 57.°

Se em vez das indicadas Series, que tomamos em o número de trez, e da fórma particular que lhe assignamos, sómente para facilitar o Cálculo, aliás trabalhoso, as tivessemos tomado em maior número, e dado a cada huma hum primeiro termo independente da sua particular raiz, nem por isso deixaria o mesmo methodo de conduzirnos a huma expressão ge-

ral que nos indicasse, como a precedente, a lei da formação de cada hum dos termos da Serie final rezultante de todas as substituições; pois he evidente que dada huma Serie qualquer de equações

$$\varphi t = u; \qquad fu = x; \qquad \Phi x = y; \qquad Fy = z; \ \&c.$$

d'ella se deduz

$$f\varphi t = x; \qquad \Phi f\varphi t = y; \qquad F\Phi f\varphi t = z;$$

e que por consequencia a substituição das Series rezultantes dos desenvolvimentos das funções dadas se reduz ao desenvolvimento de huma função multiplice, cuja ordem ou gráo de multiplicidade he determinado pelo número das mesmas funções: e que por tanto a lei da formação dos termos da Serie final he a mesma que a lei da formação dos termos do desenvolvimento da Função multiplice.

Rio de Janeiro 7 de Abril de 1819.

STOCKLER.

SECÇÃO III.

Do desenvolvimento das Funções de mais de huma variavel.

§. 1.°

PAra representar huma Função qualquer de mais de huma variavel escreveremos, como he geralmente usado, os caracteres destinados para indicar as variaveis em seguimento huns dos outros, separando-os entre si por virgulas, e fazendo-os preceder do algorithmo funcional, que será sempre F, ou f, Φ, ou φ: e quando estes não bastarem outro algum caracter maiusculo do alfabeto Grego. Assim $F(x,y)$ denotará huma função qualquer de duas variaveis x, e y: $\varphi(x,y,z)$ denotará huma função qualquer de trez variaveis x,y,z: e assim semelhantemente.

§. 2.°

Qualquer que seja o número das variaveis, que se considerarem como raizes de huma função, ellas serão sempre contempladas como indipendentes, no caso que o contrario se não advirta, ou que a natureza das questões o não exija.

§. 3.°

Sendo $F(x,y)$ huma função qualquer de x, e y; $F(x,\dot{y})$ representará o valor, ou expressão de $F(x,y)$ rezultante da suposição de $y=0$: $F(\dot{x},y)$ representará o valor ou a expressão de $F(x,y)$ rezultante da suposição de $x=0$: semelhantemente $\varphi(x,y,\dot{z})$ representará o valor ou a expressão de $\varphi(x,y,z)$ rezultante da suposição de $z=0$: e assim em todos os outros casos.

§. 4.°

Suposto que a analogia pareça exigir, que o valor de $F(x,y,)$ rezultante da suposição simultanea de $x=0$, e $y=0$, se represente por

$F(\dot{x},\dot{y})$, nós com tudo por brevidade o representaremos por $F.$, e o mesmo praticaremos para representar o valor de huma função de qualquer número de variaveis rezultante da suposição simultanea de cada huma das suas raizes igual a cifra: escrevendo o algorithmo funcional, que representar essa função, seguido de hum ponto.

§. 5.º

Para representar as fluxões parciaes de qualquer função de mais de huma variavel relativa a alguma das suas raizes, ou a qualquer função de alguma d'estas; e ainda mesmo as fluxões totaes, quando assim o julgarmos conveniente, escreveremos a função precedida do algorithmo fluxional d e por baixo d'este a letra, ou a expressão algorithmica, que indicar a variavel ou a função a que a fluxão se referir. Assim $\overset{d}{x} F(x,y)$ representará a fluxão parcial de $F(x,y)$ relativa a x; $\overset{d}{\varphi x} F(x,y)$ representará a fluxão parcial de $F(x,y)$ relativa a φx, ou a razão da fluxão parcial de $F(x,y)$ relativa a x, e a fluxão de φx: $\overset{d}{z}\Phi(x,y,z)$ representará a fluxão parcial de $\Phi(x,y,z)$ relativa a z; e assim mesmo $\overset{d}{\varphi(x,y)}\Phi(x,y,z)$ representará a fluxão parcial de $\Phi(x,y,z)$ relativa á função $\varphi(x,y)$.

§. 6.º

A natureza do assumpto, que temos em contemplação, exige que eu aqui indique, ou antes deduza dos principios do Methodo das Fluxões hum Theorema, que não tenho encontrado nos Livros elementares, e que nesta doutrina he da maxima importancia. Sejão Fx, φx duas quaesquer funções de x: seja dx constante, e $dFx = F'x.dx$, e $d\varphi x = \varphi' x.dx$. D'estas duas expressões se deduz

$$\frac{dFx}{d\varphi x} = \frac{F'x}{\varphi' x}$$

mas segundo as antecedentes notações he

$$\frac{dFx}{d\varphi x} = \overset{d}{\varphi x} Fx$$

e

$$F'x = \overset{d}{x} Fx$$

Logo

$$\overset{d}{\varphi x} Fx = \frac{1}{\varphi' x} \overset{d}{x} Fx$$

Donde se conclue

$$\overset{d^2}{\varphi x} Fx = \frac{1}{\varphi' x} \overset{d}{x} \left(\frac{1}{\varphi' x} \overset{d}{x} Fx \right)$$

$$\overset{d^3}{\varphi x} Fx = \frac{1}{\varphi' x} \overset{d}{x} \left(\frac{1}{\varphi' x} \overset{d}{x} \left(\frac{1}{\varphi' x} \overset{d}{x} Fx \right) \right)$$

$$\overset{d^4}{\varphi x} Fx = \frac{1}{\varphi' x} \overset{d}{x} \left(\frac{1}{\varphi' x} \overset{d}{x} \left(\frac{1}{\varphi' x} \overset{d}{x} \left(\frac{1}{\varphi' x} \overset{d}{x} Fx \right) \right) \right)$$

&c.

§. 7.º

Seguindo a lei da analogia sempre que pretendermos exprimir o valor particular de $\overset{d^n}{x} F(x,y)$ rezultante da suposição de $y = 0$ escreveremos $\overset{d^n}{x} F(x,\dot{y})$; mas quando pretendermos indicar o valor de $\overset{d^n}{x} F(x,y)$ rezultante da suposição de $x = 0$, em vez de escrevermos $\overset{d^n}{x} F(\dot{x},y)$ escreveremos por mais brevidade $\overset{d^n}{\dot{x}} Fy$. Da mesma sorte em vez de $\overset{d^n}{x} \overset{d^m}{y} F(x,\dot{y})$ escreveremos $\overset{d^n}{x} \overset{d^m}{\dot{y}} Fx$; e assim em todos os outros casos semelhantes: de sorte que o ponto sobreposto ao caracter ou simbolo escripto debaixo de qualquer algorithmo fluxional que anteceda huma Função, denota que a variavel representada pelo caracter ou simbolo apontado existia, ou se considerava existente na expressão geral da função, mas que não se escreveo nesta expressão particular, por isso que depois de executada a fluxionação, se deve supor igual a cifra.

§. 8.º

Os valores particulares de quaesquer funções, ou de suas fluxões rezultantes da suposição de que alguma das suas raizes receba hum valor particular se exprimirão escrevendo esse valor particular em logar da variavel ou raiz a que elle for atribuido não só nos logares aonde ella figurar como grandeza, mas ainda mesmo n'aquelles em que indicar que algumas operações lhe são relativas, exceptuando tão sómente os casos em

que esta omissão não possa dar occasião a engano ou duvida : assim $F(x,a)$ representará o valor particular de $F(x,y)$ rezultante da suposição de $y=a$. Semelhantemente $\frac{d}{a}F(x,a)$ representará o valor particular de $\frac{d}{y}F(x,y)$ rezultante da suposição de $y=a$; e assim mesmo em todos os outros casos semelhantes.

§. 9.º

Suposta a inteligencia d'estas notações, se considerarmos $F(x,y)$ como função meramente de y teremos (Secção I. §. 8.º)

$$F(x,y)=Fx+y\,\dot{\frac{d}{y}}\,Fx+\frac{y^2}{1.2|1}\,\dot{\frac{d^2}{y}}\,Fx+\frac{y^3}{1.3|1}\,\dot{\frac{d^3}{y}}\,Fx+\&c.$$

Serie em a qual o desenvolvimento de $F(x,y)$ procede segundo a ordem dos gráos ou potencias inteiras de y. Mas se quizermos que ella seja ordenada segundo os gráos ou potencias inteiras de ambas as variaveis então advertindo que he $F(x,\dot{y})$ ou

$$Fx=\quad F.+x\frac{d}{x}\,F.+\frac{x^2}{1.2|1}\frac{d^2}{x}\,F.+\frac{x^3}{1.3|1}\frac{d^3}{x}\,F.+\&c.$$

$$\dot{\frac{d}{y}}\,Fx=\frac{d}{y}\,F.+x\frac{d}{y}\frac{d}{x}F.+\frac{x^2}{1.2|1}\frac{d}{y}\frac{d^2}{x}F.+\frac{x^3}{1.3|1}\frac{d}{y}\frac{d^3}{x}\,F.+\&c.$$

$$\dot{\frac{d^2}{y}}\,Fx=\frac{d^2}{y}\,F.+x\frac{d^2}{y}\frac{d}{x}F.+\frac{x^2}{1.2|1}\frac{d^2}{y}\frac{d^2}{x}F.+\frac{x^3}{1.3|1}\frac{d^2}{y}\frac{d^3}{x}\,F.+\&c.$$

e em geral

$$\dot{\frac{d^n}{y}}\,Fx=\frac{d^n}{y}\,F.+x\frac{d^n}{y}\frac{d}{x}F.+\frac{x^2}{1.2|1}\frac{d^n}{y}\frac{d^2}{x}F.+\frac{x^3}{1.3|1}\frac{d^n}{y}\frac{d^3}{x}\,F.+\&c.$$

fazendo as substituições convenientes teremos

$$\begin{aligned}F(x,y)=F.&+x\frac{d}{x}F.+\frac{x^2}{1.2|1}\frac{d^2}{x}F.+\frac{x^3}{1.3|1}\frac{d^3}{x}F.+\frac{x^4}{1.4|1}\frac{d^4}{x}\,F.+\&c.\\&+y\frac{d}{y}\,F.+2\frac{yx}{1.2|1}\frac{d}{y}\frac{d}{x}F.+3\frac{yx^2}{1.3|1}\frac{d}{y}\frac{d^2}{x}F.+4\frac{yx^3}{1.4|1}\frac{d}{y}\frac{d^3}{x}\,F.+\&c.\\&+\frac{y^2}{1.2|1}\frac{d^2}{y}F.+3\frac{y^2x}{1.3|1}\frac{d^2}{y}\frac{d}{x}F.+6\frac{y^2x^2}{1.4|1}\frac{d^2}{y}\frac{d^2}{x}\,F.+\&c.\\&+\frac{y^3}{1.3|1}\frac{d^3}{y}\,F.+4\frac{y^3x}{1.4|1}\frac{d^3}{y}\frac{d}{x}\,F.+\&c.\\&+\frac{y^4}{1.4|1}\frac{d^4}{y}\,F.+\&c.\\&+\&c.\end{aligned}$$

Serie facil de continuar por quantos termos se quizer; por quanto a lei

Serie facil de continuar, por quantos termos se quizer; por quanto a lei da formação do seu termo geral ou do termo $n+1$ reduz-se a elevar o binomio $x+y$ ao gráo n, dividir cada hum dos termos d'este gráo pelo producto de todos os números naturaes desde 1 até n, e multiplica-lo pela fluxão parcial de F. em que o indice fluxional relativamente a x seja igual ao expoente de x, e o indice fluxional relativamente a y seja igual ao expoente de y no mesmo termo: lei que aplicada a cada hum dos termos parciaes, que formão cada columna vertical, ou cada termo total se póde exprimir pela seguinte, formula.

$$\frac{y^m}{1.^{m|1}} \cdot \frac{x^n}{1.^{n|1}} \dot{y}^m \dot{x}^n F.$$

§. 10.º

Querendo-se porém o desenvolvimento de $F(x,y)$ ordenado segundo as potencias inteiras de huma função arbitraria de y, então designando essa função por φy, e supondo $F(x,y)=\Phi(x,\varphi y)$, se considerarmos φy como huma simples variavel teremos

$$F(x,y)=\Phi x+\varphi y\,\dot{\Phi}x+\frac{\varphi^2 y}{1.^{2|1}}\dot{\Phi}x+\frac{\varphi^3 y}{1.^{3|1}}\dot{\Phi}x+\&c.$$

mas he (§. 6.)

$$\dot{\Phi}(x,\varphi y)=\frac{1}{\varphi' y}\dot{y}\,F(x,y)$$

$$\dot{\Phi}(x,\varphi y)=\frac{1}{\varphi' y}\dot{y}\left(\frac{1}{\varphi' y}\dot{y}\,F(x,y)\right)$$

$$\dot{\Phi}(x,\varphi y)=\frac{1}{\varphi' y}\dot{y}\left(\frac{1}{\varphi' y}\dot{y}\left(\frac{1}{\varphi' y}\dot{y}\,F(x,y)\right)\right)$$

&c.

e pois que Φx na formula precedente reprezenta o valor particular de $\Phi(x,\varphi y)$ rezultante da suposição de $\varphi y=0$, se reprezentarmos por a huma raiz d'esta equação, e a substituirmos nas antecedentes em logar de y, ellas se reduzirão a

$$\Phi x=F(x,a)$$

$$\dot{\Phi}x=\frac{1}{\varphi' a}\dot{a}\,F(x,a)$$

$$\dot{\Phi}x=\frac{1}{\varphi' a}\dot{a}\left(\frac{1}{\varphi' a}\dot{a}\,F(x,a)\right)$$

$$\dot{\Phi}x=\frac{1}{\varphi' a}\dot{a}\left(\frac{1}{\varphi' a}\dot{a}\left(\frac{1}{\varphi' a}\dot{a}\,F(x,a)\right)\right)$$

&c.

expressões que substituidas na formula 1.ª deste §. a reduzem a

$$F(x,y) = F(x,a) + \varphi y \frac{1}{\varphi' a} \frac{d}{a} F(x,a) + \frac{\varphi^2 y}{1.2|1} \frac{1}{\varphi' a} \frac{d}{a} \left(\frac{1}{\varphi' a} \frac{d}{a} F(x,a) \right) +$$

$$\frac{\varphi^3 y}{1.3|1} \frac{1}{\varphi' a} \frac{d}{a} \left(\frac{1}{\varphi' a} \frac{d}{a} \left(\frac{1}{\varphi' a} \frac{d}{a} F(x,a) \right) \right) + \&c.$$

Se reprezentarmos por $F'(x,a)$; $F''(x,a)$; $F'''(x,a)$ &c. os valores particulares das fluxões particulares das fluxões parciaes successivas de $F(x,y)$ relativas a y, rezultantes da suposição de $y = a$, e efectuarmos as fluxionações indicadas nesta formula; ella se reduzirá a

$$F(x,y) = F(x,a) + \varphi y \frac{1}{\varphi' a} F'(x,a) + \frac{\varphi^2 y}{1.2|1} \frac{1}{\varphi' a} \left(F''(x,a) \varphi' a - F'(x,a) \varphi'' a \right) + \frac{\varphi^3 y}{1.3|1} \frac{1}{\varphi'^5 a} \left(F'''(x,a) \varphi'^2 a \right.$$

$$\left. - 3 F''(x,a) . \varphi' a . \varphi'' a + F'(x,a) (3 \varphi''^2 a - \varphi' a . \varphi''' a) \right) + \frac{\varphi^4 y}{1.4|1} \frac{1}{\varphi'^7 a} \left(F^{IV}(x,a) \varphi'^3 a - 2.3 F'''(x,a) \varphi'^2 a . \varphi'' a \right.$$

$$\left. + F''(x,a) (3.5 . \varphi' a . \varphi''^2 a - 4 \varphi'^2 a . \varphi''' a) - F'(x,a) (3.5 \varphi''^3 a - 2.5 \varphi' a \varphi'' a . \varphi''' a + \varphi'^2 a . \varphi^{V} a) \right) + \&c.$$

Sendo $a = 0$, a primeira d'estas expressões se convertera em

$$F(x,y) = Fx + \varphi y \frac{1}{\varphi.'} \frac{d}{y} Fx + \frac{\varphi^2 y}{1.2|1} \frac{1}{\varphi.'} \frac{d}{y} \left(\frac{1}{\varphi.'} \frac{d}{y} Fx \right) + \frac{\varphi^3 y}{1.3|1} \cdot \frac{1}{\varphi.'} \frac{d}{y} \left(\frac{1}{\varphi.'} \frac{d}{y} \left(\frac{1}{\varphi.'} \frac{d}{y} Fx \right) \right) + \&c.$$

e a segunda em

$$F(x,y) = Fx + \varphi y \frac{1}{\varphi.'} F'x + \frac{\varphi^2 y}{1.2|1} \frac{1}{\varphi.'^3} \left(F''x . \varphi.' - F'x . \varphi.'' \right) + \frac{\varphi^3 y}{1.3|1} \cdot \frac{1}{\varphi.'^5} \left(F'''x . \varphi.'^2 - 3 F''x \varphi' \varphi.'' \right.$$

$$\left. + F'x \left(3 \varphi.''^2 - \varphi.' \varphi.''' \right) \right) + \frac{\varphi^4 y}{1.4|1} \cdot \frac{1}{\varphi.'^7} \left(F.^{IV}x \varphi.'^3 - 2.3 F'''x \varphi.'^2 \varphi.'' + F''x \left(3.5 \varphi.' \varphi.''^2 - 4 \varphi.'^2 \varphi.''' \right) \right.$$

$$\left. - F'x \left(3.5 \varphi.''^3 - 2.5 \varphi.' \varphi.'' \varphi.''' + \varphi.'^2 \varphi^{IV} \right) \right) + \&c.$$

§. 11.º

Se nestas formulas supozermos $x = 0$, a primeira se reduzirá a

$$Fy = Fa + \varphi y \frac{1}{\varphi' a} \frac{d}{a} Fa + \frac{\varphi^2 y}{1.2|1} \frac{1}{\varphi' a} \frac{d}{a} \left(\frac{1}{\varphi' a} \frac{d}{a} Fa \right) + \frac{\varphi^3 y}{1.3|1} \frac{1}{\varphi' a} \frac{d}{a} \left(\frac{1}{\varphi' a} \frac{d}{a} \left(\frac{1}{\varphi' a} \frac{d}{a} Fa \right) \right) + \&c.$$

e a segunda a

$$Fy = Fa + \varphi y \frac{1}{\varphi' a} F'a + \frac{\varphi^2 y}{1.2|1} \frac{1}{\varphi'^3 a} \left(F'a . \varphi' a - F'a . \varphi'' a \right) + \frac{\varphi^3 y}{1.3|1} \frac{1}{\varphi'^5 a} \left(F'''a . \varphi'^2 a - 3 F''a . \varphi' a . \varphi'' a \right.$$

$$\left. + F'a \left(3 \varphi''^2 a - \varphi' a . \varphi''' a \right) \right) + \&c.$$

expressões que indicão o desenvolvimento de huma qualquer função de huma só variavel ordenado segundo as potencias inteiras de outra qualquer função da mesma variavel: a primeira das quaes achamos por outros passos no §. 43 da Sec. II.

§. 12.°

D'aqui se segue que reprezentando por fx huma função qualquer de x, e por b huma das raizes da equação $fx=0$, será

$$F(x,a)= F(a,b)+fx\frac{1}{f'b}\frac{d}{b}F(a,b)+\frac{f.^2x}{1.2|1}\frac{1}{f'b}\frac{d}{b}\left(\frac{1}{f'b}\frac{d}{b}F(a,b)\right)+\&c.$$

$$\frac{d}{a}F(x,a)=\frac{d}{a}F(a,b)+fx\frac{1}{f'b}\frac{d}{a}\frac{d}{b}F(a,b)+\frac{f^2x}{1.2|1}\frac{1}{f'b}\frac{d}{b}\left(\frac{1}{f'b}\frac{d}{a}\frac{d}{b}F(a,b)\right)+\&c.$$

$$\frac{d^2}{a}F(x,a)=\frac{d^2}{a}F(a,b)+fx\frac{1}{f'b}\frac{d^2}{a}\frac{d}{b}F(a,b)+\frac{f^2x}{1.2|1}\frac{1}{f'b}\frac{d}{b}\left(\frac{1}{f'b}\frac{d^2}{a}\frac{d}{b}F(a,b)\right)+\&c.$$

&c.

valores que substituidos na formula, que no §. 10. indica o primeiro desenvolvimenento de $F(x,y)$ a converte em

$$F(x,y)=F(a,b)+fx\frac{1}{f'b}\frac{d}{b}F(a,b)+\frac{f^2x}{1.2|1}\frac{1}{f'b}\frac{d}{b}\left(\frac{1}{f'b}\frac{d}{b}F(a,b)\right)+\frac{f^3x}{1.3|1}\frac{1}{f'b}\frac{d}{b}\left(\frac{1}{fb}\frac{d}{b}\left(\frac{1}{f'b}\frac{d}{b}F(a,b)\right)\right)+\&c.$$

$$+\varphi y\frac{1}{\varphi'a}\frac{d}{a}F(a,b)+\varphi y\frac{1}{\varphi'a}fx\frac{1}{f'b}\frac{d}{a}\frac{d}{b}F(a,b)+\varphi y\frac{1}{\varphi'a}\frac{f^2x}{1.2|1}\frac{1}{f'b}\frac{d}{b}\left(\frac{1}{f'b}\frac{d}{a}\frac{d}{b}F(a,b)\right)+\&c.$$

$$+\frac{\varphi^2y}{1.2|1}\frac{1}{\varphi'a}\frac{d}{a}\left(\frac{1}{\varphi'a}\frac{d}{a}F(a,b)\right)+\frac{\varphi^2y}{1.2|1}\frac{1}{\varphi'a}fx\frac{1}{f'b}\frac{d}{a}\left(\frac{1}{\varphi'a}\frac{d}{a}\frac{d}{b}F(a,b)\right)+\&c.$$

$$+\frac{\varphi^3y}{1.3|1}\frac{1}{\varphi'a}\frac{d}{a}\left(\frac{1}{\varphi'a}\frac{d}{a}\left(\frac{1}{\varphi'a}\frac{d}{a}F(a,b)\right)\right)+\&c.$$

$$+\&c.$$

expressão do desenvolvimento de huma função qualquer de duas variaveis ordenado segundo as potencias inteiras de huma função arbitraria de cada huma das ditas variaveis.

Sendo $a=0$, e $b=0$ ella se reduz a

$$F(x,y)=F.+fx\frac{1}{f.'}\frac{d}{x}F.+\frac{f^2x}{1.2|1}\frac{1}{f.'}\frac{d}{x}\left(\frac{1}{f.'}\frac{d}{x}F.\right)+\frac{f^3x}{1.3|1}\frac{1}{f.'}\frac{d}{x}\left(\frac{1}{f.'}\frac{d}{x}\left(\frac{1}{f.'}\frac{d}{x}F.\right)\right)+\&c.$$

$$+\varphi y\frac{1}{\varphi.'}\frac{d}{y}F.+\varphi y\frac{1}{\varphi.'}fx\frac{1}{f.'}\frac{d}{y}\frac{d}{x}F.+\varphi y\frac{1}{\varphi.'}\frac{f^2x}{1.2|1}\frac{1}{f.'}\frac{d}{x}\left(\frac{1}{f.'}\frac{d}{y}\frac{d}{x}F.\right)+\&c.$$

$$+\frac{\varphi^2y}{1.2|1}\frac{1}{\varphi.'}\frac{d}{y}\left(\frac{1}{\varphi.'}\frac{d}{y}F.\right)+\frac{\varphi^2y}{1.2|1}\frac{1}{\varphi.'}fx\frac{1}{f.'}\frac{d}{y}\left(\frac{1}{\varphi.'}\frac{d}{y}\frac{d}{x}F.\right)+\&c.$$

$$+\frac{\varphi^3y}{1.3|1}\frac{1}{\varphi.'}\frac{d}{y}\left(\frac{1}{\varphi.'}\frac{d}{y}\left(\frac{1}{\varphi.'}\frac{d}{y}F.\right)\right)+\&c.$$

$$+\&c.$$

§. 13.°

Querendo-se desenvolver em Serie huma função qualquer de trez va-

riaveis $F(x,y,z)$ ordenada segundo as potencias inteiras de huma d'ellas z, considera-la-hemos como função d'essa unica variavel, e teremos

$$F(x,y,z) = F(x,y) + z \frac{d}{z} F(x,y) + \frac{z^2}{1.2|1} \frac{d^2}{z} F(x,y) + \frac{z^3}{1.3|1} \frac{d^3}{z} F(x,y) + \&c.$$

§. 14.°

Querendo-se o desenvolvimento da mesma função ordenado segundo as potencias inteiras de duas das suas raizes, considerando-a como função d'essas duas raizes tão sómente, teremos

$$\begin{aligned} F(x,y,z) = {} & Fx + y \frac{d}{y} Fx + \frac{y^2}{1.2|1} \frac{d^2}{y} Fx + \frac{y^3}{1.3|1} \frac{d^3}{y} Fx + \&c. \\ & + z \frac{d}{z} Fx + 2 \frac{z\,y}{1.2|1} \frac{d}{z} \frac{d}{y} Fx + 3 \frac{z.y^2}{1.3|1} \frac{d}{z} \frac{d^2}{y} Fx + \&c. \\ & + \frac{z^2}{1.2|1} \frac{d^2}{z} Fx + 3 \frac{z^2 y}{1.3|1} \frac{d^2}{z} \frac{d}{y} Fx + \&c. \\ & + \frac{z^3}{1.3|1} \frac{d^3}{z} Fx + \&c. \\ & + \&c. \end{aligned}$$

§. 15.°

Querendo-se porém o seu desenvolvimento ordenado segundo as potencias inteiras de todas as trez variaveis, então advertindo que he

$$Fx = F. + x \frac{d}{x} F. + \frac{x^2}{1.2|1} \frac{d^2}{x} F. + \frac{x^3}{1.3|1} \frac{d^3}{x} F. + \&c.$$

e substituindo no desenvolvimento antecedente este valor de Fx, e os valores das suas fluxões parciaes ali indicadas, derivados deste, teremos

$$\begin{aligned} F(x,y,z) = {} & F. + x \frac{d}{x} F. + \frac{x^2}{1.2|1} \frac{d^2}{x} F. + \frac{x^3}{1.3|1} \frac{d^3}{x} F. + \&c. \\ & + y \frac{d}{y} F. + y\,x \frac{d}{y} \frac{d}{x} F. + \frac{y\,x^2}{1.2|1} \frac{d}{y} \frac{d^2}{x} F. + \&c. \\ & + z \frac{d}{z} F. + \frac{y^2}{1.2|1} \frac{d^2}{y} F. + \frac{y^2\,x}{1.2|1} \frac{d^2}{y} \frac{d}{x} F. + \&c. \\ & + z\,x \frac{d}{z} \frac{d}{x} F. + \frac{y^3}{1.2|1} \frac{d^3}{y} F. + \&c. \\ & + z\,y \frac{d}{z} \frac{d}{y} F. + z.y.x \frac{d}{z} \frac{d}{y} \frac{d}{x} F. + \&c. \\ & + \frac{z^2}{1.2|1} \frac{d^2}{z} F. + \frac{z^2 x}{1.2|1} \frac{d^2}{z} \frac{d}{x} F. + \&c. \end{aligned}$$

$$+\frac{z\,x^2}{1.2|1}\frac{d\,d^2}{z\,x}F. + \&c.$$

$$+\frac{z\,y^2}{1.2|1}\frac{d\,d^2}{z\,y}F. + \&c.$$

$$+\frac{z^2\,y}{1.2|1}\frac{d^2\,d}{z\,y}F. + \&c.$$

$$+\frac{z^3}{1.3|1}\frac{d^3}{z}F. + \&c.$$

$$+\&c.$$

formula cuja lei para a formação do seu termo geral $n+1$ se reduz a elevar ao gráo n o trinomio $x+y+z$, dividir cada hum dos termos deste gráo pelo producto de todos os números naturaes d'este 1 até n, e multiplicar cada hum pela fluxão parcial de $F.$ da ordem n, em que o indice fluxional relativo a cada variavel seja o mesmo que o seu expoente de gráo; lei da qual se segue que cada hum dos termos parciaes que formão cada columna vertical se póde exprimir pela seguinte formula

$$\frac{x^r}{1.r|1}\cdot\frac{y^s}{1.s|1}\cdot\frac{z^t}{1.t|1}\cdot\frac{d^r}{x}\frac{d^s}{y}\frac{d^t}{z}F.$$

§. 16.º

Continuando a seguir passo a passo o mesmo processo, que adoptamos para dar a conhecer as leis do desenvolvimento das funções de duas variaveis acharemos, que representando por φz huma função qualquer de z, e por a huma qualquer das raizes da equação $\varphi z = 0$, o desenvolvimento de huma função de trez variaveis x, y, z, ordenado segundo as potencias inteiras de φz será qual o indica a seguinte formula

$$F(x,y,z) = F(x,y,a) + \varphi z\frac{1}{\varphi' a}\frac{d}{a}F(x,y,a) + \frac{\varphi^2 z}{1.2|1}\frac{1}{\varphi' a}\frac{d}{a}\left(\frac{1}{\varphi' a}\frac{d}{a}F(x,y,a)\right) + \&c.$$

§. 17.º

Semelhantemente acharemos que reprezentando por φz huma função qualquer de z; por fy huma função qualquer de y; por a huma das raizes da equação $\varphi z = 0$, e por b huma das raizes da equação $fy = 0$, o desenvolvimento de $F(x,y,z)$ ordenado segundo as potencias inteiras de φz, e fy será qual o reprezenta a formula seguinte:

$$F(x,y,z) = F(x,a,b) + fy\,\frac{1}{1'b}\frac{d}{b}F(x,a,b) + \frac{f^2 y}{1.2|1}\frac{1}{1'b}\frac{d}{b}\left(\frac{1}{1'b}\frac{d}{b}F(x,a,b)\right) + \frac{f^3 y}{1.3|1}\frac{1}{1'b}\frac{d}{b}\left(\frac{1}{1'b}\frac{d}{b}\left(\frac{1}{1'b}\frac{d}{b}F(x,a,b)\right)\right) + \&c.$$

$$+\varphi z\frac{1}{\varphi' a}\frac{d}{a}F(x,a,b)+\varphi z\frac{1}{\varphi' a}\,\mathrm{f}y\,\frac{1}{\mathrm{f}'b}\frac{d}{a}\frac{d}{b}F(x,a,b)+\varphi z\,\frac{1}{\varphi' a}\,\frac{\mathrm{f}^2 y}{1.2|1}\,\frac{1}{\mathrm{f}'b}\frac{d}{b}\left(\frac{1}{\mathrm{f}'b}\frac{d}{a}\frac{d}{b}F(x,a,b)\right)+\&c.$$

$$+\frac{\varphi^2 z}{1.2|1}\,\frac{1}{\varphi' a}\frac{d}{a}\left(\frac{1}{\varphi' a}\frac{d}{a}\,F(x,a,b)\right)+\frac{\varphi^2 z}{1.2|1}\,\frac{1}{\varphi' a}\,\mathrm{f}y\,\frac{1}{\mathrm{f}'b}\frac{d}{a}\left(\frac{1}{\varphi' a}\frac{d}{a}\frac{d}{b}F(x,a,b)\right)+\&c.$$

$$+\frac{\varphi^3 z}{1.3|1}\,\frac{1}{\varphi' a}\frac{d}{a}\left(\frac{1}{\varphi' a}\frac{d}{a}\left(\frac{1}{\varphi' a}\frac{d}{a}F(x,a,b)\right)\right)+\&c.$$

$$+\&c.$$

§. 18.º

Se além das hypothezes adoptadas em o §. antecedente supozer-mos tambem que Φx reprezente huma função qualquer de x, e que c reprezente huma das raizes da equação $\Phi x=0$, e quizermos determinar o desenvolvimento de $F(x,y,z)$ ordenado segundo as potencias inteiras das funções arbitrarias φz; $\mathrm{f}y$, e Φx, desenvolveremos $F(x,a,b)$ em huma serie ordenada segundo as potencias inteiras de Φx, e determinando as suas fluxões parciaes relativas a a, e a b, as substituiremos no desenvolvimento antecedente, e este processo nos conduzirá á formula seguinte.

$$F(x,y,z)=F(a,b,c)+\Phi x\,\frac{1}{\Phi' c}\frac{d}{c}F(a,b,c)+\frac{\Phi^2 x}{1.2|1}\,\frac{1}{\Phi' c}\,\frac{d}{c}\left(\frac{1}{\Phi' c}\frac{d}{c}F(a,b,c)\right)+\frac{\Phi^3 x}{1.3|1}\,\frac{1}{\Phi' c}\frac{d}{c}\left(\frac{1}{\Phi' c}\frac{d}{c}\left(\frac{1}{\Phi' c}\frac{d}{c}F(a,b,c)\right)\right)+\&c.$$

$$+\mathrm{f}y\,\frac{1}{\mathrm{f}'b}\,\frac{d}{b}F(a,b,c)+\mathrm{f}y\,\frac{1}{\mathrm{f}'b}\,\Phi x\,\frac{1}{\Phi' c}\frac{d}{b}\frac{d}{}F(a,b,c)\;+\mathrm{f}y\,\frac{1}{\mathrm{f}'b}\,\frac{\Phi^2 x}{1.2|1}\,\frac{1}{\Phi' c}\,\frac{d}{c}\left(\frac{1}{\Phi' c}\frac{d}{b}\frac{d}{c}F(a,b,c)\right)+\&c.$$

$$+\varphi z\,\frac{1}{\varphi' a}\frac{d}{a}F(a,b,c)+\frac{\mathrm{f}^2 y}{1.2|1}\,\frac{1}{\mathrm{f}'b}\,\frac{d}{b}\left(\frac{1}{\mathrm{f}'b}\frac{d}{b}F(a,b,c)\right)+\frac{\mathrm{f}^2 y}{1.2|1}\,\frac{1}{\mathrm{f}'b}\,\Phi x\,\frac{1}{\Phi' c}\frac{d}{b}\left(\frac{1}{\mathrm{f}'b}\,\frac{d}{b}\frac{d}{c}F(a,b,c)\right)+\&c.$$

$$+\varphi z\,\frac{1}{\varphi' a}\,\Phi x\,\frac{1}{\Phi' c}\,\frac{d}{a}\frac{d}{c}F(a,b,c)+\frac{\mathrm{f}^3 y}{1.3|1}\,\frac{1}{\mathrm{f}'b}\,\frac{d}{b}\left(\frac{1}{\mathrm{f}'b}\frac{d}{b}\left(\frac{1}{\mathrm{f}'b}\,\frac{d}{b}F(a,b,c)\right)\right)+\&c.$$

$$+\varphi z\,\frac{1}{\varphi' a}\,\mathrm{f}y\,\frac{1}{\mathrm{f}'b}\,\frac{d}{a}\frac{d}{b}F(a,b,c)+\varphi z\,\frac{1}{\varphi' a}\,\frac{\Phi^2 x}{1.2|1}\,\frac{1}{\Phi' c}\,\frac{d}{c}\left(\frac{1}{\Phi' c}\frac{d}{a}\frac{d}{c}F(a,b,c)\right)+\&c.$$

$$+\frac{\varphi^2 z}{1.2|1}\,\frac{1}{\varphi' a}\frac{d}{a}\left(\frac{1}{\varphi' a}\,\frac{d}{a}F(a,b,c)\right)+\varphi z\,\frac{1}{\varphi' a}\,\mathrm{f}y\,\frac{1}{\mathrm{f}'b}\,\Phi x\,\frac{1}{\Phi' c}\frac{d}{a}\frac{d}{b}\frac{d}{c}F(a,b,c)+\&c.$$

$$+\varphi z\,\frac{1}{\varphi' a}\,\frac{\mathrm{f}^2 y}{1.2|1}\,\frac{1}{\mathrm{f}'b}\,\frac{d}{b}\left(\frac{1}{\mathrm{f}'b}\frac{d}{a}\frac{d}{b}F(a,b,c)\right)+\&c.$$

$$+\frac{\varphi^2 z}{1.2|1}\,\frac{1}{\varphi' a}\,\Phi x\,\frac{1}{\Phi' c}\frac{d}{a}\left(\frac{1}{\varphi' a}\frac{d}{a}\frac{d}{c}F(a,b,c)\right)+\&c.$$

$$+\frac{\varphi^2 z}{1.2|1}\,\frac{1}{\varphi' a}\,\mathrm{f}y\,\frac{1}{\mathrm{f}'b}\frac{d}{a}\left(\frac{1}{\varphi' a}\frac{d}{a}\frac{d}{b}F(a,b,c)\right)+\&c.$$

$$+\frac{\varphi^3 z}{1.3|1}\,\frac{1}{\varphi' a}\frac{d}{a}\left(\frac{1}{\varphi' a}\frac{d}{a}\left(\frac{1}{\varphi' a}\frac{d}{a}F(a,b,c)\right)\right)+\&c.$$

$$+\&c.$$

a qual reprezenta o desenvolvimento do $F(x, y, z)$ ordenado segundo as potencias inteiras de huma função arbitraria de cada huma das suas raizes.

§. 19.°

Querendo-se o desenvolvimento de $F(x, y, z)$ ordenado segundo as potencias inteiras de huma função qualquer $\varphi(y, z)$ de duas das suas raizes, então supondo que seja

$$F(x, y, z) = F\big(x, \varphi(y, z)\big)$$

se terá pela formula do §. 9.°

$$F(x, y, z) = Fx + \varphi(y, z)\,\dot{\varphi}\,{}^{d}_{(y, z)}\,Fx + \frac{\varphi^2(y, z)}{1.2|1}\,\dot{\varphi}\,{}^{d^2}_{(y, z)}\,Fx + \frac{\varphi^3(y, z)}{1.3|1}\,\dot{\varphi}\,{}^{d^3}_{(y, z)}\,Fx + \&c.$$

expressão que nos mostra que para obtermos os valores de Fx, ou de $F\big(x, \varphi(y, z)\big)$ e de suas fluxões relativas a $\varphi(y, z)$, devemos supor esta função igual a cifra, e examinar quaes são os valores particulares ou as mudanças de fórma de $F(x, y, z)$ e suas fluxões provenientes d'esta suposição. Ora he evidente que exprimindo a equação $\varphi(y, z) = 0$ a relação que em tal caso deve existir entre as variaveis z, e y, ellas serão funções reciprocas, e por tanto nós podemos igualmente considerar y como função de z, ou z como função de y. Não he menos evidente que se por qualquer modo determinarmos o valor de huma d'estas variaveis, o valor correspondente da outra se obterá pela resolução da equação $\varphi(y, z) = 0$. Reprezentando por a o valor de z, e por b o valor correspondente de y; substituindo-os na equação hypothetica

$$F(x, y, z) = F\big(x, \varphi(y, z)\big)$$

d'ella deduziremos

$$F(x, a, b) = Fx$$

valor que substituido no desenvolvimento antecedente o converte em

$$F(x, y, z) = F(x, a, b) + \varphi(y, z)\,\dot{\varphi}\,{}^{d}_{(a, b)}\,F(x, a, b) + \frac{\varphi^2(y, z)}{1.2|1}\,\dot{\varphi}\,{}^{d^2}_{(a, b)}\,F(x, a, b) + \&c.$$

Ora se considerarmos y como função de z, ou b como função de a, será na conformidade do Theorema demonstrado em o §. 6.°

$$\varphi\,{}^{d}_{(a, b)}\,F(x, a, b) = \frac{1}{\varphi'(a, b)}\,\frac{d}{a}\,F(x, a, b)$$

$$\varphi\,{}^{d^2}_{(a, b)}\,F(x, a, b) = \frac{1}{\varphi'(a, b)}\,\frac{d}{a}\left(\frac{1}{\varphi'(a, b)}\,\frac{d}{a}\,F(x, a, b)\right)$$

$$\varphi\overset{d^3}{(a,b)}\,F(x,a,b)=\frac{1}{\varphi'(a,b)}\overset{d}{a}\left(\frac{1}{\varphi'(a,b)}\overset{d}{a}\left(\frac{1}{\varphi'(a,b)}\overset{d}{a}F(x,a,b)\right)\right)$$

&c.

e por tanto a nossa formula se reduzirá á seguinte

$$F(x,y,z)=F(x,a,b)+\varphi(y,z)\frac{1}{\varphi'(a,b)}\overset{d}{a}F(x,a,b)+\frac{\varphi^2(y,z)}{1.2|1}\frac{1}{\varphi'(a,b)}\overset{d}{a}\left(\frac{1}{\varphi'(a,b)}\overset{d}{a}F(x,a,b)\right)+\mathcal{C}c.$$

cujo segundo membro exprime o desenvolvimento, que se pertendia.

Se em vez de considerarmos b como função de a, tivessemos considerado a como função de b e representassemos por $\varphi,(a,b)$ o valor particular de $\frac{d}{y}\varphi(y,z)$ rezultante da suposição de $z=a$, e $y=b$ teriamos achado

$$F(x,y,z)=F(x,a,b)+\varphi(y,z)\frac{1}{\varphi,(a,b)}\overset{d}{b}F(x,a,b)+\frac{\varphi^2(y,z)}{1.2|1}\frac{1}{\varphi,(a,b)}\overset{d}{b}\left(\frac{1}{\varphi,(a,b)}\overset{d}{b}F(x,a,b)\right)+\mathcal{C}c.$$

§. 20.°

Sendo $x=0$ estas novas expressões de $F(x,y,z)$ se reduzem, a primeira a

$$F(y,z)=F(a,b)+\varphi(y,z)\frac{1}{\varphi'(a,b)}\overset{d}{a}F(a,b)+\frac{\varphi^2(y,z)}{1.2|1}\frac{1}{\varphi'(a,b)}\overset{d}{a}\left(\frac{1}{\varphi'(a,b)}\overset{d}{a}F(a,b)\right)+\mathcal{C}c.$$

e a segunda a

$$F(y,z)=F(a,b)+\varphi(y,z)\frac{1}{\varphi,(a,b)}\overset{d}{b}F(a,b)+\frac{\varphi^2(y,z)}{1.2|1}\frac{1}{\varphi,(a,b)}\overset{d}{b}\left(\frac{1}{\varphi,(a,b)}\overset{d}{b}F(a,b)\right)+\mathcal{C}c.$$

cada huma das quaes indica o desenvolvimento de huma função de duas variaveis ordenado segundo as potencias inteiras de outra qualquer função das mesmas variaveis.

§. 21.°

Pertendendo-se dezenvolver huma função de quatro variaveis $F(u,x,y,z)$ em huma Serie ordenada segundo as potencias inteiras de huma função arbitraria de trez das suas raizes $\varphi(x,y,z)$, procedendo de hum modo analogo suporemos

$$F(u,x,y,z)=F\left(u,\varphi(x,y,z)\right)$$

e considerando $\varphi(x,y,z)$ como huma variavel simples teremos

$$F(u,x,y,z)=Fu+\varphi(x,y,z).\dot{\varphi}\overset{d}{(x,y,z)}Fu+\frac{\varphi^2(x,y,z)}{1.2|1}\dot{\varphi}\overset{d^2}{(x,y,z)}Fu+\mathcal{C}c.$$

se supozermos a função arbitraria $\varphi(x,y,z)=f\left(x,f(y,z)\right)$, sendo $f(y,z)$

huma função tambem arbitraria de y e z; e se depois de determinarmos por qualquer modo hum valor [illegible]ozermos $f(y,z)=0$, pela rezolução d'esta equação de[illegible] valor correspondente de y rezultante d'esta supozição. R[illegible] primeiro por a e o segundo por b, e substituindo na segun[illegible]thetica $\varphi(x,y,z)=f\big(x,f(y,z)\big)$, ella se reduzirá a $\varphi(x,a,b$[illegible] tanto, pois que a formula do desenvolvimento presupoe $f(y,z)=0$ quaesquer que forem os valores de y, e z, se deduzirmos da equação

$$\varphi(x,a,b)=0$$

hum valor de x, o qual reprezento por c, e fizermos as convenientes substituições na primeira equação hypothetica

$$F\big(u,x,y,z\big)=F\big(u,\varphi(x,y,z)\big)$$

d'ella derivaremos

$$F(u,a,b,c)=Fu$$

e por consequencia o nosso desenvolvimento, considerando x, e y como funções de z, ou c e b como funções de a se convertirá em

$$F\big(u,x,y,z\big)=F\big(u,a,b,c\big)+\varphi(x,y,z)\,[illegible]\,F(u,a,b,c)+\frac{\varphi^2(x,y,z)}{1.2}\,[illegible]\,\frac{d}{a}\Big(\frac{1}{\varphi'(a,b,c)}\frac{d}{a}F(u,a,b,c)\Big)+\&c.$$

Se em vez de considerar-mos c, e b como funções de a, considerar-mos c, e a como funções de b, ou a e b como funções de c, teremos outras duas formulas analogas e igualmente aptas para reprezentarem o desenvolvimento de que se trata.

§. 22.°

Sendo $u=0$, será

$$F\big(x,y,z\big)=F\big(a,b,c\big)+\varphi(x,y,z)\,\frac{1}{\varphi'(a,b,c)}\frac{d}{a}F(a,b,c)+\frac{\varphi^2(x,y,z)}{1.2}\,\frac{1}{\varphi'(a,b,c)}\frac{d}{a}\Big(\frac{1}{\varphi'(a,b,c)}\frac{d}{a}F(a,b,c)\Big)+\&c.$$

e assim semelhantemente em todos os outros casos qualquer que seja o número das variaveis, ou raizes das funções.

§. 23.°

Não só quanto a este ultimo cazo, mas ainda mesmo a respeito de todos os outros que temos contemplado nesta Secção, o processo que havemos seguido na deducção de nossas idéas, assás claramente manifesta o que deve praticar-se para obter o desenvolvimento de huma qualquer fun-

ção simples de muitas variaveis. Passemos por tanto á investigação das leis, que devem regular o desenvolvimento das funções multiplices.

§. 24.

Quando nestas o algorithmo multiplice se contempla como simples, he evidente que o seu desenvolvimento he identico com o das funções simplices, e que pretendendo-se indicar nada ha mais que fazer do que substituir o algorithmo multiplice, ao algorithmo simples. Resta por tanto para completar esta doutrina que indaguemos qual he a lei do desenvolvimento das funções multiplices de mais de huma variavel, quando alguma das funções submultiplices se contempla como variavel simples. Reprezente por tanto $F\varphi(x,y)$ huma função dupla de duas variaveis x e y: cujo desenvolvimento se pretenda ordenado segundo as potencias de $\varphi(x,y)$ Pela regra demonstrada em a primeira Secção § 8.º será

$$F\varphi(x,y) = F. + \varphi(x,y)\,\frac{d}{\varphi(x,y)}F. + \frac{\varphi^2(x,y)}{1.2|1}\,\frac{d^2}{\varphi(x,y)}F. + \frac{\varphi^3(x,y)}{1.3|1}\,\frac{d^3}{\varphi(x,y)}F. + \&c.$$

E pois que a indicação $F.$ denota que neste desenvolvimento se deve supor em $F\varphi(x,y)$ e suas fluxões $\varphi(x,y) = 0$, he evidente que, determinando por qualquer modo hum valor de y, e pela rezolução da equação $\varphi(x,y) = 0$ o valor correspondente de x, se reprezentarmos o primeiro por a e o segundo por b, e se considerar-mos b como função de a, a formula precedente se converterá em

$$F\varphi(x,y) = F. + \varphi(x,y)\,\frac{1}{\varphi'(a,b)}\,\frac{d}{a}F. + \frac{\varphi^2(x,y)}{1.2|1}\,\frac{1}{\varphi'(a,b)}\,\frac{d}{a}\left(\frac{1}{\varphi'(a,b)}\,\frac{d}{a}F.\right) + \&c.$$

considerando a como função de b, acharíamos

$$F\varphi(x,y) = F. + \varphi(x,y)\,\frac{1}{\varphi_1(a,b)}\,\frac{d}{b}F. + \frac{\varphi^2(x,y)}{1.2|1}\,\frac{1}{\varphi_1(a,b)}\,\frac{d}{b}\left(\frac{1}{\varphi_1(a,b)}\,\frac{d}{b}F.\right) + \&c.$$

§. 25.º

Em quanto as funções multiplices de qualquer número de variaveis se considerarem debaixo da fórma geral $F\varphi f$ &c. (x, y, &c.) os processos até aqui indicados tem logar no desenvolvimento de todas; porém como as funções multiplices, e ainda mesmo as simplices admitem algumas fórmas particulares que podem dar mais facilidade ao seu desenvolvimento, e manifestar leis particulares relativas a essas fórmas, as quaes facilitem aos Calculadores o conhecimento dos rezultados mais simplices ou mais con-

venientes ás questões que houverem de tratar, e algumas vezes tambem os desenvolvimentos sejão sujeitos a condições expressadas por equações, as quaes notavelmente os modifiquem, passemos a considerar alguns d'esses casos especiaes, e a indicar as leis peculiares, que devem regular o desenvolvimento das funções que a elles pertencerem, ou que á elles se poderem reduzir, para o que os consideraremos em Problemas separados.

§. 26.º

PROBLEMA I.

Desenvolver $F(fx, \varphi y)$ em huma Serie ordenada segundo as potencias inteiras de fx, e de φy.

SOLUÇÃO.

Considerando fx, e φy como variaveis simplices, será (§. 9.º)

$$F(fx,\varphi y) = F. + fx\,\tfrac{d}{fx}F. + \tfrac{f^2x}{1.2|1}\tfrac{d^2}{fx}F. + \tfrac{f^3x}{1.3|1}\tfrac{d^3}{fx}F. + \&c.$$
$$+ \varphi y\,\tfrac{d}{\varphi y}F. + \varphi y.fx\,\tfrac{d}{\varphi y}\tfrac{d}{fx}F. + \varphi y\,\tfrac{f^2x}{1.2|1}\tfrac{d}{\varphi y}\tfrac{d^2}{fx}F. + \&c.$$
$$+ \tfrac{\varphi^2 y}{1.2|1}\tfrac{d^2}{\varphi y}F. + \tfrac{\varphi^2 y}{1.2|1}.fx\,\tfrac{d^2}{\varphi y}\tfrac{d}{fx}F. + \&c.$$
$$+ \tfrac{\varphi^3 y}{1.3|1}\tfrac{d^3}{\varphi y}F. + \&c.$$
$$+ \&c.$$

mas he (§. 6.º)

$$\tfrac{d}{fx}F. = \tfrac{1}{f'a}\tfrac{d}{a}F. \quad\cdots\cdots\quad \tfrac{d}{\varphi y}F. = \tfrac{1}{\varphi' b}\tfrac{d}{b}F.$$
$$\tfrac{d^2}{fx}F. = \tfrac{1}{f'a}\tfrac{d}{a}\left(\tfrac{1}{f'a}\tfrac{d}{a}F.\right) \quad \&c. \qquad \tfrac{d^2}{\varphi y}F. = \tfrac{1}{\varphi' b}\tfrac{d}{b}\left(\tfrac{1}{\varphi' b}\tfrac{d}{b}F.\right) \quad \&c.$$

Sendo a o valor de x derivado da equação $fx = 0$; e b o valor de y derivado da equação $\varphi y = 0$; e por tanto será

$$F(fx,\varphi y) = F. + fx\,\tfrac{1}{f'a}\tfrac{d}{a}F. + \tfrac{f^2x}{1.2|1}\tfrac{1}{f'a}\tfrac{d}{a}\left(\tfrac{1}{f'a}\tfrac{d}{a}F.\right) + \tfrac{f^3x}{1.3|1}\tfrac{1}{f'a}\tfrac{d}{a}\left(\tfrac{1}{f'a}\tfrac{d}{a}\left(\tfrac{1}{f'a}\tfrac{d}{a}F.\right)\right) + \&c.$$
$$+ \varphi y\,\tfrac{1}{\varphi' b}\tfrac{d}{b}F. + \varphi y\,\tfrac{1}{\varphi' b}fx\,\tfrac{1}{\varphi' b}\tfrac{d}{b}\tfrac{d}{a}F. + \varphi y\,\tfrac{1}{\varphi' b}\tfrac{f^2x}{1.2|1}\tfrac{1}{f'a}\tfrac{d}{a}\left(\tfrac{1}{f'a}\tfrac{d}{b}\tfrac{d}{a}F.\right) + \&c.$$
$$+ \tfrac{\varphi^2 y}{1.2|1}\tfrac{1}{\varphi' b}\tfrac{d}{b}\left(\tfrac{1}{\varphi' b}\tfrac{d}{b}F.\right) + \tfrac{\varphi^2 y}{1.2|1}.\tfrac{1}{\varphi' b}fx\,\tfrac{1}{f'a}\tfrac{d}{b}\left(\tfrac{1}{f'a}\tfrac{d}{b}\tfrac{d}{a}F.\right) + \&c.$$

$$+\frac{\varphi^3 y}{1.^3|^1}\frac{1}{\varphi' b}\frac{d}{b}\left(\frac{1}{\varphi' b}\frac{d}{b}\left(\frac{1}{\varphi' b}\frac{d}{b}F.\right)\right)+\&c.$$

$$+\&c.$$

§. 27.°

PROBLEMA II.

Desenvolver $F(fx, \varphi y)$ em huma Serie ordenada segundo as potencias inteiras de x, e de y.

Solução.

Segundo a regra geral (§. 9.°) he

$$F(fx, \varphi y) = F(f., \varphi.) + x\frac{d}{x}F(f., \varphi.) + \frac{x^2}{1.^2|^1}\frac{d^2}{x}F(f., \varphi.) + \&c.$$

$$+ y\frac{d}{y}F(f., \varphi.) + yx\frac{d}{y}\frac{d}{x}F(f., \varphi.) + \&c.$$

$$+\frac{y.^2}{1.^2|^1}\frac{d^2}{y}F(f., \varphi.) + \&c.$$

$$+\&c.$$

mas supondo

$$\frac{d}{x}F(fx, \varphi y) = F'(fx, \varphi y)f'x$$

$$\frac{d}{y}F(fx, \varphi y) = F_{,}(fx, \varphi y)\varphi_{,}y$$

$$\frac{d}{x}\frac{d}{y}F(fx, \varphi y) = F'_{,}(fx, \varphi y)f'x.\varphi_{,}y)$$

$$\frac{d}{x}F'(fx, \varphi y) = F''(fx, \varphi y)f'x$$

$$\frac{d}{y}F_{,}(fx, \varphi y) = F_{,,}(fx, \varphi y)\varphi y.$$

&c.

de maneira que os accentos sobrepostos aos algorithmos funcionaes F e f se refirão ao número das fluxionações relativas a x, e os accentos subpostos aos algorithmos F e φ se refirão ao número das fluxionações relativas a y; e praticando as substituições convenientes no desenvolvimento antecedente elle se reduz a

$$F(fx, \varphi y) = F(f., \varphi.) + xF'(f., \varphi.)f.' + \frac{x^2}{1.^2|^1}\left(F''(f., \varphi.)f.'^2 + F'(f., \varphi.)f.''\right) + \&c.$$

$$+ yF_{,}(f., \varphi.)\varphi_{,} + yxF'_{,}(f., \varphi.)f.'\varphi_{,} + \&c.$$

$$+\frac{y^2}{1.^2|^1}\left(F_{,,}(f., \varphi.)\varphi_{,}^2 + F_{,}(f., \varphi.)\varphi_{,,}\right) + \&c.$$

$$+\&c.$$

§. 28.º

PROBLEMA III.

Desenvolver $fx.\varphi y$ em huma Serie ordenada segundo as potencias inteiras de x, e de y.

Solução.

Este problema he hum cazo particular do antecedente, e por isso fazendo $F(fx,\varphi y)=fx.\varphi y$, d'esta equação se derivará $F(f.,\varphi.)=f.\varphi.$; $F'(f.,\varphi.)=f.'\varphi.$; $F_{,}(f.,\varphi.)=f.\varphi_{,}$; $F_{,}(f.,\varphi.)=f.'\varphi_{,}$; $F''(f.,\varphi.)=f.''\varphi.$; $F_{,,}(f.,\varphi.)=f.\varphi_{,,}$; &c., e substituindo na formula da sua solução se terá

$$fx.\varphi y=f.\varphi.+x.f.'\varphi.+\frac{x^2}{1.2|1}f.''\varphi.+\frac{x^3}{1.3|1}f.'''\varphi.+\&c.$$
$$+y.f.\varphi_{,}+y.x.f.'\varphi_{,}+\frac{y.x^2}{1.2|1}f.''\varphi_{,}+\&c.$$
$$+\frac{y^2}{1.2|1}f.\varphi_{,,}+\frac{y^2x}{1.2|1}f.'\varphi_{,,}+\&c.$$
$$+\frac{y^3}{1.3|1}f.\varphi_{,,,}+\&c.$$
$$+\&c.$$

§. 29.º

PROBLEMA. IV.

Desenvolver $\frac{fx}{\varphi y}$ em huma Serie ordenada segundo as potencias inteiras de x, e y.

Solução.

Tambem este problema he hum cazo particular do Problema II.; e por isso fazendo $F(fx,\varphi y)=\frac{fx}{\varphi y}$; d'esta equação se deriva $F(f.,\varphi.)=\frac{f.}{\varphi.}$;

$F'(f.,\varphi.)=\frac{f.'}{\varphi.}$; $F_{,}(f.,\varphi.)=-\frac{f.\varphi_{,}}{\varphi.^2}$; $F''(f.,\varphi.)=\frac{f.''}{\varphi.}$; $F'(f.,\varphi.)=-\frac{f.'\varphi_{,}}{\varphi.^2}$;

$$F_{II}(f.,\varphi) = \frac{2f.\varphi_{i}^{2} - f.\varphi.\varphi_{ii}}{\varphi.^{3}}\,;\; F.'''(f.,\varphi.) = \frac{f.'''}{\varphi.}\,;\; F_{I}''(f.,\varphi.) = -\frac{f.''\varphi_{i}}{\varphi^{2}}\,;\; F_{II}'(f.,\varphi.)$$

$$= \frac{(2\varphi_{i}^{2} - \varphi.\varphi_{ii})}{\varphi.^{3}} f.'\,;\; F_{III}(f.,\varphi.) = -\frac{(3.2\varphi_{i}^{3} - 3.2\varphi.\varphi_{i}\varphi_{ii} + \varphi^{2}\varphi_{iii})}{\varphi.^{4}} f.\,;\; \&c.\,,\; e$$

por tanto será

$$\frac{fx}{\varphi y} = \frac{f.}{\varphi.} + x\frac{f.'}{\varphi.} + \frac{x^{2}}{1.2|1}\frac{f.''}{\varphi.} \cdots + \frac{x^{3}}{1.3|1}\frac{f.'''}{\varphi.} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \&c.$$

$$- y\frac{\varphi_{i}f.}{\varphi.^{2}} - yx\frac{\varphi_{i}f.'}{\varphi.^{2}} \cdots\cdots - \frac{yx^{2}}{1.2|1}\frac{\varphi_{i}f.''}{\varphi.^{2}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \&c.$$

$$+ \frac{y^{2}}{1.2|1}\frac{(2\varphi_{i}^{2} - \varphi.\varphi_{ii})}{\varphi.^{3}} f. + \frac{y^{2}x}{1.2|1}\frac{(2\varphi_{i}^{2} - \varphi.\varphi_{ii})}{\varphi.^{3}} f.' \cdots\cdots\cdots + \&c.$$

$$- \frac{y^{3}}{1.3|1}\frac{(3.2\varphi_{i}^{3} - 3.2\varphi.\varphi_{i}\varphi_{ii} + \varphi.^{2}\varphi_{iii})}{\varphi.^{4}} f. + \&c.$$

$$+ \&c.$$

§. 30.°

PROBLEMA V.

Desenvolver Log. $\varphi(x,y)$ em huma Serie ordenada segundo as potencias inteiras de x, e de y.

Solução.

Aplicando á função proposta a doutrina que expozemos em o §. 9.° veremos que he

$$\text{Log. }\varphi(x,y) = \text{Log. }\varphi. + x.\frac{1}{\varphi.}\frac{d}{x}\varphi. + \frac{x^{2}}{1.2|1}\frac{d}{x}\left(\frac{1}{\varphi.}\frac{d}{x}\varphi.\right) + \frac{x^{3}}{1.3|1}\frac{d^{2}}{x}\left(\frac{1}{\varphi.}\frac{d}{x}\varphi.\right) + \&c.$$

$$+ y.\frac{1}{\varphi.}\frac{d}{y}\varphi. + y.x.\frac{d}{y}\left(\frac{1}{\varphi.}\frac{d}{x}\varphi.\right) + \frac{yx^{2}}{1.2|1}\frac{d}{y}\frac{d}{x}\left(\frac{1}{\varphi.}\frac{d}{x}\varphi.\right) + \&c.$$

$$+ \frac{y^{2}}{1.2|1}\frac{d}{y}\left(\frac{1}{\varphi.}\frac{d}{y}\varphi.\right) + \frac{y.^{2}x}{1.2|1}\frac{d}{y}\frac{d}{x}\left(\frac{1}{\varphi.}\frac{d}{y}\varphi.\right) + \&c.$$

$$+ \frac{y^{3}}{1.3|1}\frac{d^{2}}{y}\left(\frac{1}{\varphi.}\frac{d}{y}\varphi.\right) + \&c.$$

$$+ \&c.$$

e efeituando as fluxionações indicadas

$$\text{Log. }\varphi(x,y) = \text{Log. }\varphi. + x\frac{\varphi.'}{\varphi.} + \frac{x^{2}}{1.2|1}\left(\frac{\varphi.''}{\varphi.} - \frac{\varphi.'^{2}}{\varphi.^{2}}\right) + \frac{x^{3}}{1.3|1}\left(\frac{\varphi.'''}{\varphi.} - \frac{3\varphi.'\varphi.''}{\varphi.^{2}} + \frac{2\varphi.'^{3}}{\varphi.^{3}}\right) \cdots\cdots + \&c.$$

$$+ y\frac{\varphi_{\text{i}}}{\varphi.} + yx\left(\frac{\varphi'_{\text{i}}}{\varphi.} - \frac{\varphi.'\varphi_{\text{i}}}{\varphi.^2}\right) + \frac{yx^2}{1.2|1}\left(\frac{\varphi''_{\text{i}}}{\varphi.} - \frac{(\varphi_{\text{i}}\varphi.'' + 2\varphi_{\text{i}}'\varphi.')}{\varphi.^2} + \frac{2\varphi_{\text{i}}'\varphi.'^2}{\varphi.^3}\right) + \&c.$$

$$+ \frac{y^2}{1.2|1}\left(\frac{\varphi_{\text{ii}}}{\varphi.} - \frac{\varphi_{\text{i}}^2}{\varphi.^2}\right) + \frac{y^2x}{1.2|1}\left(\frac{\varphi'_{\text{ii}}}{\varphi.} - \frac{(\varphi.'\varphi_{\text{ii}} + 2\varphi'_{\text{i}}\varphi_{\text{i}})}{\varphi.^2} + \frac{2\varphi.'\varphi_{\text{i}}^2}{\varphi.^3}\right) + \&c.$$

$$+ \frac{x^3}{1.3|1}\left(\frac{\varphi_{\text{iii}}}{\varphi.} - \frac{3\varphi_{\text{i}}\varphi_{\text{ii}}}{\varphi.^2} + \frac{2\varphi_{\text{i}}^3}{\varphi.^3}\right) \text{ - - - - - } + \&c.$$

$$+ \&c.$$

§. 31.°

PROBLEMA VI.

Desenvolver $e^{\varphi(x,y)}$ em huma Serie ordenada segundo as potencias inteiras de x, e de y.

Solução.

Servindo-nos dos mesmos meios, que empregamos na resolução do Problema antecedente, acharemos

$$e^{\varphi(x,y)} = e^{\varphi.}\left(1 + x.\varphi.' + \frac{x^2}{1.2|1}\left(\varphi.'' + \varphi.'^2\right) + \frac{x^3}{1.3|1}\left(\varphi.''' + 3\varphi.'\varphi.'' + \varphi.'^3\right) \text{ - - - - - } + \&c.\right.$$

$$+ y.\varphi_{\text{i}} + yx\left(\varphi'_{\text{i}} + \varphi.'\varphi_{\text{i}}\right) + \frac{yx^2}{1.2|1}\left(\varphi''_{\text{i}} + 2\varphi.'\varphi'_{\text{i}} + \varphi_{\text{i}}\varphi.'' + \varphi.'^2\varphi_{\text{i}}\right) + \&c.$$

$$+ \frac{y^2}{1.2|1}\left(\varphi_{\text{iii}} + \varphi_{\text{i}}^2\right) + \frac{y^2x}{1.2|1}\left(\varphi'_{\text{ii}} + 2\varphi_{\text{i}}\varphi'_{\text{i}} + \varphi.'\varphi_{\text{ii}} + \varphi_{\text{i}}^2\varphi.'\right) + \&c.$$

$$+ \frac{y^3}{1.3|1}\left(\varphi_{\text{iii}} + 3\varphi_{\text{i}}\varphi_{\text{ii}} + \varphi_{\text{i}}^3\right) \text{ - - - - - - - } + \&c.$$

$$\left. + \&c.\right)$$

§. 32.°

PROBLEMA VII.

Dada a equação $\varphi(x,y) = fy$, desenvolver $F(x,y)$ em função de y.

Solução.

Segundo o theorema exposto no §. 20 he

$$F(x,y)=F(a,b)+\varphi(x,y)\frac{1}{\varphi'(a,b)}\frac{d}{a}F(a,b)+\frac{\varphi^2(x,y)}{1.2|1}\frac{1}{\varphi'(a,b)}\frac{d}{a}\left(\frac{1}{\varphi'(a,b)}\frac{d}{a}F(a,b)\right)+\&c.$$

expressão aonde a denota hum valor de y, o qual no problema actual deve deduzir-se da equação $fy=0$; e b denota o valor correspondente de x deduzido da equação $\varphi(x,a)=0$; mas he $\varphi(x,y)=fy$; logo

$$F(x,y)=F(a,b)+fy\frac{1}{\varphi'(a,b)}\frac{d}{a}F(a,b)+\frac{f^2y}{1.2|1}\cdot\frac{1}{\varphi'(a,b)}\frac{d}{a}\left(\frac{1}{\varphi'(a,b)}\frac{d}{a}F(a,b)\right)+\&c.$$

ou por ser $\varphi(a,b)=fa$

$$F(x,y)=F(a,b)+fy.\frac{1}{f'a}\frac{d}{a}F(a,b)+\frac{f^2y}{1.2|1}\cdot\frac{1}{f'a}\frac{d}{a}\left(\frac{1}{f'a}\frac{d}{a}F(a,b)\right)+\&c.$$

formula, que no cazo de ser $a=0$ se reduz a

$$F(x,y)=Fb+fy.\frac{1}{f.'}\frac{d}{y}Fb+\frac{f^2y}{1.2|1}\cdot\frac{1}{f'}\frac{d}{y}\left(\frac{1}{f.'}\frac{d}{y}Fb\right)+\frac{f^3y}{1.3|1}\cdot\frac{1}{f.'}\frac{d}{y}\left(\frac{1}{f.'}\frac{d}{y}\left(\frac{1}{f.'}\frac{d}{y}Fb\right)\right)+\&c.$$

§. 33.°

PROBLEMA VIII.

Dada a equação $\varphi(x,y)=yfy$, desenvolver $F(x,y)$ em função de y.

Solução.

Este problema reduz-se ao antecedente supondo $yfy=fy$; mas como neste cazo he $a=0$, e d'esta equação hypothetica se deduzem as seguintes $f.'=f.$; $f.''=2f.'$; $f.'''=3f.''$; $f.^{IV}=4f.'''$; &c. a formula da Solução achada em o §. antecedente se reduz a

$$F(x,y)=Fb+yfy\frac{F'b}{f.}+\frac{y^2f^2y}{1.2|1}\frac{d}{y}\left(\frac{F'b}{f.^2}\right)+\frac{y^3f^3y}{1.3|1}\frac{d^2}{y}\left(\frac{F'b}{f.^3}\right)+\frac{y^4f^4y}{1.4|1}\frac{d^3}{y}\left(\frac{F'b}{f.^4}\right)+\&c.$$

escrevendo $F'b$ em logar de $\frac{d}{y}Fb$.

Querendo-se o desenvolvimento ordenado segundo as potencias inteiras de y, substituiremos em logar de fy; f^2y; f^3y; &c. os seus competentes desenvolvimentos, e teremos

$$\begin{aligned}F(x,y)=Fb&+yF'b+y^2f.'\frac{F'b}{f.}&&+y^3\frac{f.''}{1.2|1}\frac{F'b}{f.}&&+y^4\frac{f.'''}{1.3|1}\frac{F'b}{f.}&&+\&c.\\&+\frac{y^2}{1.2|1}f.^2\frac{d}{y}\left(\frac{F'b}{f.^2}\right)&&+\frac{y^3}{1.2|1}f.^2'\frac{d}{y}\left(\frac{F'b}{f.^2}\right)&&+\frac{y^4}{1.2|1}f.^2''\frac{d}{y}\left(\frac{F'b}{f.^2}\right)&&+\&c.\\&&&+\frac{y^3}{1.3|1}f.^3\frac{d^2}{y}\left(\frac{F'b}{f.^3}\right)&&+\frac{y^4}{1.3|1}f.^3'\frac{d^2}{y}\left(\frac{F'b}{f.^3}\right)&&+\&c.\end{aligned}$$

$$+\frac{y^4}{1.4|1}f.^4\frac{d^3}{y}\left(\frac{F'b}{f.^4}\right)+\&c.$$

$$+\&c.$$

Serie cuja lei he assás patente, e que por tanto póde continuar-se por quantos termos se quizer.

§. 34.°

Se em vez de reduzir-mos a rezolução d'este Problema, á do Problema antecedente, recorrer-mos á formula, segundo a qual he

$$F(x,y)=Fb+yfy\frac{1}{\varphi_1 b}\frac{d}{b}Fb+\frac{y^2f^2y}{1.2|1}\frac{1}{\varphi_1 b}\frac{d}{b}\left(\frac{1}{\varphi_1 b}\frac{d}{b}Fb\right)+\frac{y^3f^3y}{1.3|1}\frac{1}{\varphi_1 b}\frac{d}{b}\left(\frac{1}{\varphi_1 b}\frac{d}{b}\left(\frac{1}{\varphi_1 b}\frac{d}{b}Fb\right)\right)+\&c.$$

não só teremos esta mesma formula para solução do problema actual; mas querendo o desenvolvimento ordenado segundo as potencias inteiras de y acharemos

$$F(x,y)=Fb+yf.\frac{1}{\varphi_1 b}\frac{d}{b}Fb+y^2f.'\frac{1}{\varphi_1 b}\frac{d}{b}Fb \qquad +y^3\frac{f.''}{1.2|1}\frac{1}{\varphi_1 b}\frac{d}{b}Fb \qquad +\&c.$$

$$+\frac{y^2}{1.2|1}f.^2\frac{1}{\varphi_1 b}\frac{d}{b}\left(\frac{1}{\varphi_1 b}\frac{d}{b}Fb\right)+\frac{y^3}{1.2|1}f.^2{}'\frac{1}{\varphi_1 b}\frac{d}{b}\left(\frac{1}{\varphi_1 b}\frac{d}{b}Fb\right) \qquad +\&c.$$

$$+\frac{y^3}{1.3|1}f.^3\frac{1}{\varphi_1 b}\frac{d}{b}\left(\frac{1}{\varphi_1 b}\frac{d}{b}\left(\frac{1}{\varphi_1 b}\frac{d}{b}Fb\right)\right)+\&c.$$

$$+\&c.$$

§. 35.°

PROBLEMA IX.

Dada a equação $x\varphi(x,y)=fy$, desenvolver $F(x,y)$ em função y.

Solução.

Supondo $x\varphi(x,y)=\Phi(x,y)$ será, como acabamos de ver (§. 32.)

$$F(x,y)=F(a,b)+fy\frac{1}{f'a}\frac{d}{a}F(a,b)+\frac{f^2y}{1.2|1}\frac{1}{f'a}\frac{d}{a}\left(\frac{1}{f'a}\frac{d}{a}F(a,b)\right)+\frac{f^3y}{1.3|1}\frac{1}{f'a}\frac{d}{a}\left(\frac{1}{f'a}\frac{d}{a}\left(\frac{1}{f'a}\frac{d}{a}F(a,b)\right)\right)+\&c.$$

sendo a huma das raizes da equação $fy=0$, e b huma das raizes da equação $\Phi(x,a)=0$, mas como neste cazo he $\Phi(x,a)=x\varphi(x,a)$, será $x=0$ hum dos valores que se deve considerar reprezentado por b, e por tanto o nosso desenvolvimento será

$$F(x,y)=Fa+fy.\frac{1}{f'a}\frac{d}{a}Fa+\frac{f^2y}{1.2|1}\cdot\frac{1}{f'a}\frac{d}{a}\left(\frac{1}{f'a}\frac{d}{a}Fa\right)+\frac{f^3y}{1.3|1}\cdot\frac{1}{f'a}\frac{d}{a}\left(\frac{1}{f'a}\frac{d}{a}\left(\frac{1}{f'a}Fa\right)\right)+\&c.$$

§. 36.°

Se em vez de reduzirmos a resolução d'este problema á do Problema VII., que deduzimos da formula 1.ª do §. 20, recorressemos á 2.ª formula do dito §. veriamos que ella se reduz no prezente cazo a

$$F(x,y)=Fa+fy\,\frac{1}{\Phi_{,}a}\,\frac{d}{x}\,Fa+\frac{f^2y}{1.2|1}\,\frac{1}{\Phi_{,}a}\,\frac{d}{x}\left(\frac{1}{\Phi_{,}a}\,\frac{d}{x}\,Fa\right)+\frac{f^3y}{1.3|1}\,\frac{1}{\Phi_{,}a}\,\frac{d}{x}\left(\frac{1}{\Phi_{,}a}\,\frac{d}{x}\left(\frac{1}{\Phi_{,}a}\,\frac{d}{x}\,Fa\right)\right)+\&c.$$

mas da equação hypothetica $x\,\varphi(x,y)=\Phi(x,y)$ deduz-se $\Phi_{,}a=\varphi a$; $\Phi_{,,}a=2\,\varphi_{,}a$; $\Phi_{,,,}a=3\,\varphi_{,,}a$; $\Phi_{,,,,}a=4\,\varphi_{,,,}a$; &c. e por consequencia representando $\frac{d}{x}\,Fa$ por $F_{,}a$ teremos

$$F(x,y)=Fa+fy\,\frac{F_{,}a}{\varphi a}+\frac{f^2y}{1.2|1}\,\frac{d}{x}\left(\frac{F_{,}a}{\varphi^2 a}\right)+\frac{f^3y}{1.3|1}\,\frac{d^2}{x}\left(\frac{F_{,}a}{\varphi^3 a}\right)+\frac{f^4y}{1.4|1}\,\frac{d^3}{x}\left(\frac{F_{,}a}{\varphi^4 a}\right)+\&c.$$

§. 37.°

PROBLEMA X.

Dada a equação $x\,\varphi(x,y)=yfy$, desenvolver $F(x,y)$ em função de y.

Solução.

Supondo $yfy=fy$, este problema se reduz ao antecedente; e como no prezente cazo se póde tomar $a=0$, as formulas da solução d'aquelle se converterão nas deste substituindo yfy em logar de fy; cifra em logar de a; $f.$ em logar de $f.'$; $2f.'$ em logar de $f.''$; $3\,f.''$ em logar de $f.'''$ &c. e por tanto teremos

$$F(x,y)=F.+yfy\,\frac{F.'}{f.}+\frac{y^2f^2y}{1.2|1}\,\frac{d}{y}\left(\frac{F.'}{f.^2}\right)+\frac{y^3f^3y}{1.3|1}\,\frac{d^2}{y}\left(\frac{F.'}{f.^3}\right)+\&c.$$

e

$$F(x,y)=F.+yfy\,\frac{F_{,}}{\varphi.}+\frac{y^2f^2y}{1.2|1}\,\frac{d}{x}\left(\frac{F_{,}}{\varphi.^2}\right)+\frac{y^3f^3y}{1.3|1}\,\frac{d^2}{x}\left(\frac{F_{,}}{\varphi.^3}\right)+\&c.$$

ou substituindo por fy; f^2y; f^3y; &c. os seus competentes desenvolvimentos

$$F(x,y)=F.+yF.'+y^2f.'\,\frac{F.'}{f.}+y^3\,\frac{f.''}{1.2|1}\,\frac{F.'}{f.}+y^4\,\frac{f.'''}{1.3|1}\,\frac{F.'}{f.}+\&c.$$

$$+\frac{y^2}{1.2|1}\,f.^2\,\frac{d}{y}\left(\frac{F.'}{f.^2}\right)+\frac{y^3}{1.2|1}\,f.^2{}'\,\frac{d}{y}\left(\frac{F.'}{f.^2}\right)+\frac{y^4}{1.2|1}\,\frac{f.^2{}''}{1.2|1}\,\frac{d}{y}\left(\frac{F.'}{f.^2}\right)+\&c.$$

$$+\frac{y^3}{1.3|1}f.^3\frac{d^2}{y^2}\left(\frac{F.'}{f.^3}\right)+\frac{y^4}{1.3|1}f.^{3\prime}\frac{d^2}{y^2}\left(\frac{F.'}{f.^3}\right)+\mathfrak{C}c.$$

$$+\frac{y^4}{1.4|1}f.^4\frac{d^3}{y^3}\left(\frac{F.'}{f.^4}\right)+\mathfrak{C}c.$$

$$+\mathfrak{C}c.$$

e semelhantemente

$$F(x,y)=F.+yf.\frac{F_{\mathrm{i}}}{\varphi.}+y^2f.'\frac{F_{\mathrm{i}}}{\varphi.}+y^3\frac{f.''}{1.2|1}\frac{F_{\mathrm{i}}}{\varphi.}+y^4\frac{f.'''}{1.3|1}\frac{F_{\mathrm{i}}}{\varphi.}+\mathfrak{C}c.$$

$$+\frac{y^2}{1.2|1}f.^2\frac{d}{x}\left(\frac{F_{\mathrm{i}}}{\varphi.^2}\right)+\frac{y^3}{1.2|1}f.^{2\prime}\frac{d}{x}\left(\frac{F_{\mathrm{i}}}{\varphi.^2}\right)+\frac{y^4}{1.2|1}\frac{f.^{2\prime\prime}}{1.2|1}\frac{d}{x}\left(\frac{F_{\mathrm{i}}}{\varphi.^2}\right)+\mathfrak{C}c.$$

$$+\frac{y^3}{1.3|1}f.^3\frac{d^2}{x^2}\left(\frac{F_{\mathrm{i}}}{\varphi.^3}\right)+\frac{y^4}{1.3|1}f.^{3\prime}\frac{d^2}{x^2}\left(\frac{F_{\mathrm{i}}}{\varphi.^3}\right)+\mathfrak{C}c.$$

$$+\frac{y^4}{1.4|1}f.^4\frac{d^3}{x^3}\left(\frac{F_{\mathrm{i}}}{\varphi.^4}\right)+\mathfrak{C}c.$$

$$+\mathfrak{C}c.$$

Corolario I.

D'esta solução se conclue que será

$$\varphi(x,y)=\varphi.+yfy\frac{\varphi!}{f.}+\frac{y^2f^2y}{1.2|1}\frac{d}{y}\left(\frac{\varphi!}{f.^2}\right)+\frac{y^3f^3y}{1.3|1}\frac{d^2}{y^2}\left(\frac{\varphi!}{f.^3}\right)+\mathfrak{C}c.$$

ou

$$\varphi(x,y)=\varphi.+yfy\frac{\varphi_{\mathrm{i}}}{\varphi.}+\frac{y^2f^2y}{1.2|1}\frac{d}{x}\left(\frac{\varphi_{\mathrm{i}}}{\varphi.^2}\right)+\frac{y^3f^3y}{1.3|1}\frac{d^2}{x^2}\left(\frac{\varphi_{\mathrm{i}}}{\varphi.^3}\right)+\mathfrak{C}c.$$

Corolario II.

Semelhantemente se conclue que será

$$\frac{1}{\varphi(x,y)}=\varphi.^{-1}+yfy\frac{1}{f.}\frac{d}{y}\left(\varphi.^{-1}\right)+\frac{y^2f^2y}{1.2|1}\frac{1}{y}\left(\frac{1}{f.^2}\frac{d}{y}\left(\varphi.^{-1}\right)\right)+\frac{y^3f^3y}{1.3|1}\frac{d^2}{y^2}\left(\frac{1}{f.^3}\frac{d}{y}\left(\varphi.^{-1}\right)\right)+\mathfrak{C}c.$$

ou

$$\frac{1}{\varphi(x,y)}=\varphi.^{-1}+yfy\frac{1}{\varphi.}\frac{d}{x}\left(\varphi.^{-1}\right)+\frac{y^2f^2y}{1.2|1}\frac{d}{x}\left(\frac{1}{\varphi.^2}\frac{d}{x}\left(\varphi.^{-1}\right)\right)+\frac{y^3f^3y}{1.3|1}\frac{d^2}{x^2}\left(\frac{1}{\varphi.^3}\frac{d}{x}\left(\varphi.^{-1}\right)\right)+\mathfrak{C}c.$$

e que por consequencia, tendo sómente em vista esta segunda formula, he

$$x=yfy.\varphi.^{-1}+\frac{y^2f^2y}{1.2|1}\frac{d}{x}\left(\varphi.^{-2}\right)+\frac{y^3f^3y}{1.3|1}\frac{d^2}{x^2}\left(\varphi.^{-3}\right)+\frac{y^4f^4y}{1.4|1}\frac{d^3}{x^3}\left(\varphi.^{-4}\right)+\mathfrak{C}c.$$

ou

$$x = y.f.\varphi.^{-1} + y^2 f.' \varphi.^{-1} + y^3 \frac{f.''}{1.2|1} \varphi.^{-1} + y^4 \frac{f.'''}{1.3|1} \varphi.^{-1} + \&c.$$

$$+ \frac{y^2}{1.2|1} f.^2 \frac{d}{x}(\varphi.^{-2}) + \frac{y^3}{1.2|1} f.^{2\prime} \frac{d}{x}(\varphi.^{-2}) + \frac{y^4}{1.2|1} f.^{2\prime\prime} \frac{d}{x}(\varphi.^{-2}) + \&c.$$

$$+ \frac{y^3}{1.3|1} f.^3 \frac{d^2}{x}(\varphi.^{-3}) + \frac{y^4}{1.3|1} f.^{3\prime} \frac{d^2}{x}(\varphi.^{-3}) + \&c.$$

$$+ \frac{y^4}{1.4|1} f.^4 \frac{d^3}{x}(\varphi.^{-4}) + \&c.$$

$$+ \&c.$$

Corolario III.

No cazo de ser $fy = 1$; ou, o que he o mesmo, sendo a equação dada

$$x\varphi(x,y) = y$$

será

$$F(x,y) = F. + y\frac{F.'}{f.} + \frac{y^2}{1.2|1} \frac{d}{y}\left(\frac{F.'}{f.^2}\right) + \frac{y^3}{1.3|1} \frac{d^2}{y}\left(\frac{F.'}{f.^3}\right) + \frac{y^4}{1.4|1} \frac{d^3}{y}\left(\frac{F.'}{f.^4}\right) + \&c.$$

ou

$$F(x,y) = F. + y\frac{F_1}{\varphi.} + \frac{y^2}{1.2|1} \frac{d}{x}\left(\frac{F_1}{\varphi.^2}\right) + \frac{y^3}{1.3|1} \frac{d^2}{x}\left(\frac{F_1}{\varphi.^3}\right) + \frac{y^4}{1.4|1} \frac{d^3}{x}\left(\frac{F_1}{\varphi.^4}\right) + \&c.$$

será

$$\frac{1}{\varphi(x,y)} = \varphi.^{-1} + y\frac{1}{f.}\frac{d}{y}(\varphi.^{-1}) + \frac{y^2}{1.2|1}\frac{d}{y}\left(\frac{1}{f.^2}\frac{d}{y}(\varphi.^{-1})\right) + \frac{y^3}{1.3|1}\frac{d}{y}\left(\frac{1}{f.^3}\frac{d}{y}(\varphi.^{-1})\right) + \&c.$$

ou

$$\frac{1}{\varphi(x,y)} = \varphi.^{-1} + \frac{y}{1.2|1}\frac{d}{x}(\varphi.^{-2}) + \frac{y^2}{1.3|1}\frac{d^2}{x}(\varphi.^{-3}) + \frac{y^3}{1.4|1}\frac{d^3}{x}(\varphi.^{-4}) + \&c.$$

e por consequencia

$$x = y\varphi.^{-1} + y^2\frac{1}{f.}\frac{d}{y}(\varphi.^{-1}) + \frac{y^3}{1.2|1}\frac{d}{y}\left(\frac{1}{f.^2}\frac{d}{y}(\varphi.^{-1})\right) + \frac{y^4}{1.3|1}\frac{d}{y}\left(\frac{1}{f.^3}\frac{d}{y}(\varphi.^{-1})\right) + \&c.$$

ou

$$x = y\varphi.^{-1} + \frac{y^2}{1.2|1}\frac{d}{x}(\varphi.^{-2}) + \frac{y^3}{1.3|1}\frac{d^2}{x}(\varphi.^{-3}) + \frac{y^4}{1.4|1}\frac{d^3}{x}(\varphi.^{-4}) + \&c.$$

§. 38.º

PROBLEMA XI.

Dada a equação $x\varphi(x,y)=-yfy$, expressar y em função de x.

Solução.

Escrevendo-se $-yfy$ em logar de yfy na expressão de x achada em o Corolario II. do problema antecedente, teremos que o valor de x, que se deduz da equação dada no problema actual, será

$$x=-yfy\,\varphi.^{-1}+\frac{y^2f^2y}{1.2|1}\frac{d}{x}\left(\varphi.^{-2}\right)-\frac{y^3f^3y}{1.3|1}\frac{d^2}{x}\left(\varphi.^{-3}\right)+\frac{y^4f^4y}{1.4|1}\frac{d^3}{x}\left(\varphi.^{-4}\right)-\&c.$$

ou

$$\begin{aligned}x=&-y.f.\,\varphi.^{-1}-y^2f.'\,\varphi.^{-2}-y^3\frac{f.''}{1.2|1}\,\varphi.^{-3}-y^4\frac{f.'''}{1.3|1}\,\varphi.^{-4}-\&c.\\&+\frac{y^2}{1.2|1}f.^2\frac{d}{x}\left(\varphi.^{-2}\right)+\frac{y^3}{1.2|1}f.^2{}'\frac{d}{x}\left(\varphi.^{-2}\right)+\frac{y^4}{1.2|1}\frac{f.^2{}''}{1.2|1}\frac{d}{x}\left(\varphi.^{-2}\right)+\&c.\\&-\frac{y^3}{1.3|1}f.^3\frac{d^2}{x}\left(\varphi.^{-3}\right)-\frac{y^4}{1.3|1}f.^3{}'\frac{d^2}{x}\left(\varphi.^{-3}\right)-\&c.\\&+\frac{y^4}{1.4|1}f.^4\frac{d^3}{x}\left(\varphi.^{-4}\right)+\&c.\\&-\&c.\end{aligned}$$

e por tanto supondo

$$\begin{aligned}\Phi y=&-f.\,\varphi.^{-1}-yf.'\,\varphi.^{-2}-y.^2\frac{f.''}{1.2|1}\,\varphi.^{-3}-y.^3\frac{f.'''}{1.3|1}\,\varphi.^{-4}-\&c.\\&+\frac{y^2}{1.2|1}f.^2\frac{d}{x}\left(\varphi.^{-2}\right)+\frac{y^3}{1.2|1}f.^2{}'\frac{d}{x}\left(\varphi.^{-2}\right)+\frac{y^4}{1.2|1}\frac{f.^2{}''}{1.2|1}\frac{d}{x}\left(\varphi.^{-2}\right)+\&c.\\&-\frac{y^3}{1.3|1}f.^3\frac{d^2}{x}\left(\varphi.^{-3}\right)-\frac{y^4}{1.3|1}f.^3{}'\frac{d^2}{x}\left(\varphi.^{-3}\right)-\&c.\\&+\frac{y^4}{1.4|1}f.^4\frac{d^3}{x}\left(\varphi.^{-4}\right)+\&c.\\&-\&c.\end{aligned}$$

será $x=y.\Phi y$. Mas he (Secção II. §. 34.)

$$y=x\,\Phi.^{-1}+\frac{x^2}{1.2|1}\frac{d}{y}\left(\Phi.^{-2}\right)+\frac{x^3}{1.3|1}\frac{d^2}{y}\left(\Phi.^{-3}\right)+\frac{x^4}{1.4|1}\frac{d^3}{y}\left(\Phi.^{-4}\right)+\&c.$$

e como da precedente equação hypothetica se deduz

$$\Phi. = -f.\ \varphi.^{-1}$$

$$\Phi.' = -f.'\varphi.^{-1} + \tfrac{1}{2} f.^2 \tfrac{d}{x}\left(\varphi.^{-2}\right)$$

$$\Phi.'' = -f.''\varphi.^{-1} + \tfrac{2}{2} f.^{2'} \tfrac{d}{x}\left(\varphi.^{-2}\right) - \tfrac{1}{3} f.^3 \tfrac{d^2}{x}\left(\varphi.^{-3}\right)$$

$$\Phi.''' = -f.'''\varphi.^{-1} + \tfrac{3}{2} f.^{2''} \tfrac{d}{x}\left(\varphi.^{-2}\right) - \tfrac{3}{3} f.^{3'} \tfrac{d^2}{x}\left(\varphi.^{-3}\right) + \tfrac{1}{4} f.^4 \tfrac{d^3}{x}\left(\varphi.^{-4}\right)$$

$$\Phi^{IV} = -f.^{IV}\varphi.^{-1} + \tfrac{4}{2} f.^{2'''} \tfrac{d}{x}\left(\varphi.^{-2}\right) - \tfrac{3}{3} f.^{3''} \tfrac{d^2}{x}\left(\varphi.^{-3}\right) + \tfrac{3}{4} f.^{4'} \tfrac{d^3}{x}\left(\varphi.^{-4}\right) - \tfrac{1}{5} f.^5 \tfrac{d^4}{x}\left(\varphi.^{-5}\right)$$

&c.

Segue-se que he

$$\begin{aligned} y = &- x\,\varphi.f.^{-1} - x^2 \tfrac{d}{x}\,\varphi.f.^{-1} - \tfrac{x^3}{1.2|1} \tfrac{d^2}{x}\,\varphi.f.^{-1} - \tfrac{x^4}{1.3|1} \tfrac{d^3}{x}\,\varphi.f.^{-1} - \&c. \\ &+ \tfrac{x^2}{1.2|1}\,\varphi.^2 \tfrac{d}{y}\left(f.^{-2}\right) + \tfrac{x^3}{1.2|1} \tfrac{d}{x}\left(\varphi.^{-2}\right)\tfrac{d}{y}\left(f.^{-2}\right) + \tfrac{x^4}{1.2^2|1} \tfrac{d^2}{x}\left(\tfrac{\varphi.^{-2}}{1.2|1}\right)\tfrac{d}{y}\left(f.^{-2}\right) + \&c. \\ &- \tfrac{x^3}{1.3|1}\,\varphi.^3 \tfrac{d^2}{y}\left(f.^{-3}\right) - \tfrac{x^4}{1.3|1} \tfrac{d}{x}\left(\varphi.^{-3}\right)\tfrac{d^2}{y}\left(f.^{-3}\right) - \&c. \\ &+ \tfrac{x^4}{1.4|1}\,\varphi.^4 \tfrac{d^3}{y}\left(f.^{-4}\right) + \&c. \\ &- \&c. \end{aligned}$$

§. 39.°

Scholio I.

A determinação do valor de y em função de x, rigorosamente falando, não carece da intervenção do Methodo da reversão das Series; por quanto sendo $F(x,y)$ huma função tal que seja $F. = 0$, ella poderá sempre resolver-se nas duas $y\,f\,y + x\,\varphi(x,y)$, ou nas duas $x\,\Phi\,x + y\,f(x,y)$, e por tanto deverá ser sempre

$$y\,f\,y + x\,\Phi\,(x,y) = x\,\Phi\,x + y\,f\,(x,y)$$

mas pois que esta equação deve ter logar quaesquer que sejão os valores de x, e de y, se supozermos $x = 0$ teremos

$$y\,f\,y = y\,f\,y$$

e se supozermos $y = 0$ teremos

$$x\,\Phi\,x = x\,\varphi\,x$$

donde rezulta que he de necessidade $f = f$, e $\varphi = \Phi$, isto he a identida-

de de cada hum d'estes dois pares de Simbolos funcionaes , e que por consequencia sempre que for

$$x\,\Phi(x,y) = -yfy$$

será tambem

$$yf(x,y) = -x\,\varphi x$$

Donde se segue evidentemente que a expressão de y se póde derivar da expressão de x escrevendo y em logar de x, e φ em logar de f, e reciprocamente f em logar de φ e x em logar de y.

§. 40.°

Scholio II.

Leibnitz foi o primeiro Analysta que resolveo este problema, e que deu a sua solução sem publicar a demonstração d'ella. Diversos Geometras tem depois tentado demonstra-la; entre outros M. Arbogast no seu Cálculo das Derivações Artigo 5.° n.° 300, e segaintes, que cito para que se possa comparar as nossas Soluções, e os methodos que a ellas nos conduzírão.

Pelo que respeita ao problema resolvido por Moivre em o tomo XX das Transações Philosophicas da Sociedade Real de Londres, que deu occasião a que Leibnitz se occupasse d'aquelle, cuja resolução acabamos de expôr, e que Arbogast tambem tratou pelo seu methodo, elle se reduz ao seguinte

» Dada a equação $xfx = y\varphi y$, exprimir x em função de y. »

e então he evidente que considerando $y\varphi y$ como huma simples variavel a sua resolução se acha comprehendida no methodo geral da reversão das Series. Segundo o dito methodo, que exposemos na Secção II. §. 34. será

$$x = y\,\varphi y f.^{-1} + \frac{y^2\,\varphi^2 y}{1.2|1}\,\frac{d}{x}(f.^{-2}) + \frac{y^3\,\varphi^3 y}{1.3|1}\,\frac{d^2}{x}(f.^{-3}) + \frac{y^4\,\varphi^4 y}{1.4|1}\,\frac{d^3}{x}(f.^{-4}) + \&c.$$

e por tanto substituindo em logar de φy; $\varphi^2 y$; $\varphi^3 y$; &c. os seus competentes desenvolvimentos, se tem

$$x = y.\,\varphi.f.^{-1} + y^2\,\varphi.'f.^{-1} + y^3\,\frac{\varphi.''}{1.2|1}f.^{-1} + y^4\,\frac{\varphi.'''}{1.3|1}f.^{-1} + \&c.$$

$$+ \frac{y^2}{1.2|1}\varphi.^2\,\frac{d}{x}(f.^{-2}) + \frac{y^3}{1.2|1}\,\varphi\,2'\,\frac{d}{x}(f.^{-2}) + \frac{y^4}{1.2|1}\,\frac{\varphi.^{2\,''}}{1.2|1}\,\frac{d}{x}(f.^{-2}) + \&c.$$

$$+ \frac{y^3}{1.3|1}\,\varphi.^3\,\frac{d^2}{x}(f.^{-3}) + \frac{y^4}{1.3|1}\,\varphi.^{3\,'}\,\frac{d^2}{x}(f.^{-3}) + \&c.$$

$$+\frac{y^4}{1.2.3.4}\varphi.^4\frac{d^3}{dx}(f.^{-4})+\&c.$$

$$+\&c.$$

§. 41.°

PROBLEMA XII.

Dada a equação $f(x,y)=0$ desenvolver $Fx,y)$ em função de y.

Solução.

O desenvolvimento de $F(x,y)$ exposto em o §. 9.° mostra que he sempre

$$f(x,y)=fy+x\varphi(x,y)$$

mas he no prezente cazo

$$x\varphi(x,y)=-fy$$

logo a Solução do problema actual reduz-se á do problema IX. mudando o signal de fy; e por tanto será

$$F(x,y)=Fa-fy\frac{1}{f'a}\frac{d}{da}Fa+\frac{f^2y}{1.2}\frac{1}{f'a}\frac{d}{da}\left(\frac{1}{f'a}\frac{d}{da}Fa\right)+\frac{f^3y}{1.2.3}\cdot\frac{1}{f'a}\frac{d}{da}\left(\frac{1}{f'a}\frac{d}{da}\left(\frac{1}{f'a}\frac{d}{da}Fa\right)\right)+\&c.$$

NOTA.

Este problema foi pela primeira vez tratado por M. Lambert. A sua Solução póde vêr-se no volume da Academia Real das Sciencias e Bellas Letras de Berlin para o anno de 1770. Arbogast tambem se occupou d'esta mesma questão no seu Cálculo das Derivações.

§. 42.°

PROBLEMA XIII.

Dada a equação $y=x\varphi(x,y)$ desenvolver Fx em função de y.

Solução.

Segundo vimos em o Corolario 3.° do Problema X. he

$$x=y\varphi.^{-1}+\frac{y^2}{1.2}\frac{d}{dx}(\varphi.^{-2})+\frac{y^3}{1.2.3}\frac{d^2}{dx}(\varphi.^{-3})+\frac{y^4}{1.2.3.4}\frac{d^3}{dx}(\varphi.^{-4})+\&c.$$

ou $x = y\,f\,y$, supondo

$$f\,y = \varphi.^{-1} + \frac{y}{1.2|1}\frac{d}{x}(\varphi.^{-2}) + \frac{y^2}{1.3|1}\frac{d^2}{x}(\varphi.^{-3}) + \frac{y^3}{1.4.1}\frac{d^3}{x}(\varphi.^{-4}) + \&c.$$

Por tanto será (Secção II. §. 20.)

$$\begin{aligned} F\,x = F. &+ y\,F.'\,f. + y^2\,F.'\,f.' + y^3\,F.'\frac{f.''}{1.2|1} + y^4\,F.'\,\frac{f.'''}{1.3|1} + \&c. \\ &+ y^2\frac{F.''}{1.2|1}f.^2 + y^3\,\frac{F.''}{1.2|1}\,f.^2{}' + y^4\,\frac{F.''}{1.2|1}\,\frac{f.^2{}''}{1.2|1} + \&c. \\ &+ y^3\,\frac{F.'''}{1.3|1}f.^3 + y^4\,\frac{F.'''}{1.3|1}\,f.^3{}' + \&c. \\ &+ y^4\,\frac{F.^{IV}}{1.4|1}f.^4 + \&c. \\ &+ \&c. \end{aligned}$$

Mas da equação hypothetica deduz-se

$$\begin{aligned} f. &= \varphi.^{-1} \\ f.' &= \tfrac{1}{1}\frac{d}{x}(\varphi.^{-2}) \\ f.'' &= \tfrac{1}{2}\frac{d^2}{x}(\varphi.^{-3}) \\ f.''' &= \tfrac{1}{4}\frac{d^3}{x}(\varphi.^{-4}) \end{aligned}$$

&c.

e por tanto feitas as substituições convenientes na formula antecedente rezulta finalmente

$$\begin{aligned} F\,x = F. &+ y\,F.'\varphi.^{-1} + \frac{y^2}{1.2|1}F.'\frac{d}{x}(\varphi.^{-2}) + \frac{y^3}{1.3|1}F.'\frac{d^2}{x}(\varphi.^{-3}) + \frac{y^4}{1.4|1}F.'\frac{d^3}{x}(\varphi.^{-4}) + \&c. \\ &+ \frac{y^2}{1.2|1}F.''\varphi.^{-2} + 2\frac{y^3}{1.3|1}F.''\frac{d}{x}(\varphi.^{-3}) + 3\frac{y^4}{1.4|1}F.''\frac{d^2}{x}(\varphi.^{-4}) + \&c. \\ &+ \frac{y^3}{1.3|1}F.'''\varphi.^{-3} + 3\frac{y^4}{1.4|1}F.'''\frac{d}{x}(\varphi.^{-4}) + \&c. \\ &+ \frac{y^4}{1.4|1}F.^{IV}\varphi.^{-4} + \&c. \\ &+ \&c. \end{aligned}$$

§. 43.°

PROBLEMA. XIV.

Dada a equação $x = y\,\varphi(x,y)$ desenvolver Fx em função de y.

Solução.

Supondo $\varphi(x,y) = \Phi^{-1}(x,y)$, a equação dada se reduz a $x\,\Phi(x,y) = y$, e por tanto será, como acabamos de ver em o §. antecedente

$$Fx = F.+y.F.'\Phi.^{-1}+\frac{y^2}{1.2|1}F.'\,\frac{d}{x}\left(\Phi.^{-2}\right)+\frac{y^3}{1.3|1}F.'\,\frac{d^2}{x}\left(\Phi.^{-3}\right)+\frac{y^4}{1.4|1}F.'\,\frac{d^3}{x}\left(\Phi.^{-4}\right)+\&c.$$
$$+\frac{y^2}{1.2|1}F.''\quad\Phi.^{-2}+2\frac{y^3}{1.3|1}F.''\,\frac{d}{x}\left(\Phi.^{-3}\right)+3\frac{y^4}{1.4|1}F.''\,\frac{d^2}{x}\left(\Phi.^{-4}\right)+\&c.$$
$$+\frac{y^3}{1.3|1}F.'''\quad\Phi.^{-3}+3\frac{y^4}{1.4|1}F.'''\,\frac{d}{x}\left(\Phi.^{-4}\right)+\&c.$$
$$+\frac{y^4}{1.4|1}F.^{IV}\quad\Phi.^{-4}+\&c.$$
$$+\&c.$$

mas da equação hypothetica deduz-se $\Phi^{-1} = \varphi.$; logo

$$Fx = F.+y.F.'\varphi.+\frac{y^2}{1.2|1}F.'\,\frac{d}{x}(\varphi.^2)+\frac{y^3}{1.3|1}F.'\,\frac{d^2}{x}(\varphi.^3)+\frac{y^4}{1.4|1}F.'\,\frac{d^3}{x}(\varphi.^4)+\&c.$$
$$+\frac{y^2}{1.2|1}F.''\quad\varphi.^2+2\frac{y^3}{1.3|1}F.''\,\frac{d}{x}(\varphi.^3)+3\frac{y^4}{1.4|1}F.''\,\frac{d^2}{x}(\varphi.^4)+\&c.$$
$$+\frac{y^3}{1.3|1}F.'''\quad\varphi.^3+3\frac{y^4}{1.4|1}F.'''\,\frac{d}{x}(\varphi.^4)+\&c.$$
$$+\frac{y^4}{1.4|1}F.^{IV}\quad\varphi.^4+\&c.$$
$$+\&c.$$

§. 44.°

PROBLEMA XV.

Dado a equação $x = a + y\,\varphi(x,y)$, desenvolver Fx em função de y.

Solução.

Se supozermos $x - a = u$, será $x = a + u$, e a equação dada se reduzirá a

$$u = y\,\varphi\big((a+u),y\big)$$

e se além d'isto supozermos $\varphi\big((a+u),y\big) = \Phi(u,y)$ ella se converterá em

$$u = y\,\Phi(u,y)$$

e por tanto reprezentando por Fu huma função qualquer de u, se a pertendermos desenvolver em função de y, teremos (§. 43.)

$$Fu = F. + y.F.'\Phi. + \frac{y^2}{1.2|1}F.'\,\frac{d}{u}(\Phi.^2) + \frac{y^3}{1.3|1}F.'\,\frac{d^2}{u}(\Phi.^3) + \frac{y^4}{1.4|1}F.'\,\frac{d^3}{u}(\Phi.^4) + \&c.$$

$$+ \frac{y^2}{1.2|1}F.''\quad\Phi.^2 + 2\frac{y^3}{1.3|1}F.''\,\frac{d}{u}(\Phi.^3) + 3\frac{y^4}{1.4|1}F.''\frac{d^2}{u}(\Phi.^4) + \&c.$$

$$+ \frac{y^3}{1.3|1}F.'''\quad\Phi.^3 + 3\frac{y^4}{1.4|1}F.'''\,\frac{d}{u}(\Phi.^4) + \&c.$$

$$+ \frac{y^4}{1.4|1}F.^{IV}\quad\Phi.^4 + \&c.$$

$$+ \&c.$$

expressão na qual cumpre não esquecer que he $F.' = \frac{d}{y}F.$; $F.'' = \frac{d^2}{y}F.$; $F.''' = \frac{d^3}{y}F.$; &c. Mas supondo Fu, ou $F(x-a) = Fx$, será $F. = Fa$; $F.' = \frac{d}{y}Fa$; $F.'' = \frac{d^2}{y}Fa$; &c. Ora da equação hypothetica

$$\varphi\big((a+u),y\big) = \Phi(u,y)$$

deduz-se $\Phi. = \varphi a$; e pois que he $du = dx$, e tanto vale supor $u = 0$, como $x = a$, será $\frac{d}{u}(\Phi.^m) = \frac{d}{a}(\overset{m}{\varphi}a)$; $\frac{d^2}{u}(\Phi.^m) = \frac{d^2}{a}(\overset{m}{\varphi}a)$; &c., e por consequencia, substituindo estes valores no desenvolvimento de Fu, teremos

$$Fx = Fa + y.\frac{d}{y}Fa.\varphi a + \frac{y^2}{1.2|1}\cdot\frac{d}{y}Fa.\frac{d}{a}(\varphi^2 a) + \frac{y^3}{1.3|1}\frac{d}{y}Fa.\frac{d^2}{a}(\varphi^3 a) + \&c.$$

$$+ \frac{y^2}{1.2|1}\frac{d^2}{y}Fa.\varphi^2 a\quad + 2\frac{y^3}{1.3|1}\frac{d^2}{y}Fa.\frac{d}{a}(\varphi^3 a) + \&c.$$

$$+ \frac{y^3}{1.3|1}\frac{d^3}{y}Fa.\quad\varphi^3 a + \&c.$$

$$+ \&c.$$

§. 45.º

PROBLEMA XVI.

Dada a equação $x = f\big(a + y\,\varphi(x,y)\big)$ desenvolver Fx em função de y.

Solução.

Considerando $y\,p\,(x,y)$ como huma simples variavel, será

$$x = fa + y\,\varphi(x,y)\,f'a + y^2\,\varphi^2(x,y)\,\frac{f''a}{1.2|1} + y^3\,\varphi^3(x,y)\,\frac{f'''a}{1.3|1} + \&c.$$

ou $x = fa + y\,\Phi(x,y)$, fazendo

$$\Phi(x,y) = \varphi(x,y)\,f'a + y\,\varphi^2(x,y)\,\frac{f''a}{1.2|1} + y^2\,\varphi^3(x,y)\,\frac{f'''a}{1.3|1} + \&c.$$

donde se conclue pela solução do problema antecedente, que he

$$Fx = Fa + y\,\frac{d}{y}\,Fa.\,\Phi fa + \frac{y^2}{1.2|1}\,\frac{d}{y}\,Ffa.\,\frac{d}{a}\Phi^2 fa + \frac{y^3}{1.3|1}\,\frac{d}{y}\,Ffa.\,\frac{d^2}{a}\,\Phi^3 fa + \&c.$$

$$+ \frac{y^2}{1.2|1}\,\frac{d^2}{y}\,Ffa.\,\Phi^2 fa. + 2\,\frac{y^3}{1.3|1}\,\frac{d^2}{y}\,Ffa.\,\frac{d}{a}\,\Phi.^3 fa + \&c.$$

$$+ \frac{y^3}{1.3|1}\,\frac{d^3}{y}\,Ffa\quad\Phi^3 fa + \&c.$$

$$+ \&c.$$

Mas da equação dada se deduz $x = fa$ quando $y = 0$; e por tanto, supondo $y = 0$, a equação hypothetica nos mostra que he $\Phi fa = \varphi fa.\,f'a$; donde se conclue

$$Fx = Ffa + y\,\frac{d}{y}\,Ffa.\,\varphi fa.\,f'a + \frac{y^2}{1.2|1}\,\frac{d}{y}\,Ffa\,\frac{d}{a}\left(\varphi^2 fa.f'^2_a\right) + \frac{y^3}{1.3|1}\,\frac{d}{y}\,Ffa\,\frac{d^2}{a}\left(\varphi^3 fa.f'^3_a\right) + \&c.$$

$$+ \frac{y^2}{1.2|1}\,\frac{d^2}{y}\,Ffa.\,\varphi^2 fa.f'^2a \quad + 2\,\frac{y^3}{1.3|1}\,\frac{d^2}{y}\,Ffa\,\frac{d}{a}\left(\varphi^3 fa.f'^3_a\right) + \&c.$$

$$+ \frac{y^3}{1.3|1}\,\frac{d^3}{y}\,Ffa\quad\varphi^3 fa.f'^3_a \quad + \&c.$$

$$+ \&c.$$

§. 46.º

PROBLEMA XVII.

Dada a equação $\varphi(x,y)=y$ desenvolver Fy em função de x.

Solução.

Segundo observamos em §. 9.º he

$$\varphi(x,y)=\varphi y+x\overset{d}{\cdot}_x\varphi y+\frac{x^2}{1.2|1}\overset{d^2}{\cdot}_x\varphi y+\frac{x^3}{1.3|1}\overset{d^3}{\cdot}_x\varphi y+\&c.$$

e por tanto temos no prezente cazo

$$y=\varphi y+x\overset{d}{\cdot}_x\varphi y+\frac{x^2}{1.2|1}\overset{d^2}{\cdot}_x\varphi y+\frac{x^3}{1.3|1}\overset{d^3}{\cdot}_x\varphi y+\&c.$$

Mas da equação dada deduz-se que, sendo $x=0$, he $y=\varphi y$; e por consequencia reprezentando por a hum dos valores de y, que satisfazem a esta equação, o desenvolvimento de $\varphi(x,y)$ se converte em

$$y=\varphi a+x\overset{d}{\cdot}_x\varphi a+\frac{x^2}{1.2|1}\overset{d^2}{\cdot}_x\varphi a+\frac{x^3}{1.3|1}\overset{d^3}{\cdot}_x\varphi a+\&c.$$

expressão que, fazendo

$$fx=\overset{d}{\cdot}_x\varphi a+\frac{x}{1.2|1}\overset{d^2}{\cdot}_x\varphi a+\frac{x^2}{1.3|1}\overset{d^3}{\cdot}_x\varphi a+\&c.$$

se reduz a

$$y=\varphi a+x\,fx$$

e da qual, supondo

$$Fy=F(y-\varphi a)$$

se conclue que he $Fy=F(x\,fx)$, ou

$$\begin{aligned}Fy=F.+x\,F.'f.+x^2\,F.'f.'+x^3\,F.'\frac{f.''}{1.2|1}+x^4\,F.'\frac{f.'''}{1.3|1}+\&c.\\+x^2\frac{F.''}{1.2|1}f.^2+x^3\frac{F.''}{1.2|1}f.^2{}'+x^4\frac{F.''}{1.2|1}\frac{f.^2{}''}{1.2|1}+\&c.\\+x^3\frac{F.'''}{1.3|1}f.^3+x^4\frac{F.'''}{1.3|1}f.^3{}'+\&c.\\+x^4\frac{F.^{iv}}{1.4|1}f.^4+\&c.\\+\&c.\end{aligned}$$

Mas da equação $F(y-\varphi a)=Fy$ deduz-se

$$F. = Fa$$

$$F.' = \frac{d}{a}\_ Fa = F'a$$

$$F.'' = \frac{d^2}{a}\_ Fa = F''a$$

$$F.''' = \frac{d^3}{a}\_ Fa = F'''a$$

&c.

e da equação

$$fx = \frac{d}{x}\, \varphi a + \frac{x}{1.2|1}\, \frac{d^2}{x}\, \varphi a + \frac{x^2}{1.3|1}\, \frac{d^3}{x}\, \varphi a + \&c.$$

que por mais simplicidade escrevo assim

$$fx = \varphi_{I} a + \frac{x}{1.2|1}\, \varphi_{II} a + \frac{x^2}{1.3|1}\, \varphi_{III} a + \&c.$$

deduz se

$$f. = \varphi_{I} a$$

$$f.' = \tfrac{1}{2}\, \varphi_{II} a$$

$$f.'' = \tfrac{1}{3}\, \varphi_{III} a$$

$$f.''' = \tfrac{1}{4}\, \varphi_{IV} a$$

&c.

donde se conclue, que feitas as substituições convenientes, he

$$Fy = Fa + x.F'a.\, \varphi_{I} a + \frac{x^2}{1.2|1} F'a\, \varphi_{II} a + \frac{x^3}{1.3|1} F'a.\, \varphi_{III} a + \frac{x^4}{1.4|1} F'a.\, \varphi_{IV} a + \&c.$$

$$+ \frac{x^2}{1.2|1} F''a.\varphi_{I}^{2} a + \frac{x^3}{1.2|1} F''a\, \varphi_{I}^{2\prime} a + \frac{x^4}{1.2|1} \frac{F''a}{1.2|1}\, \varphi_{I}^{2\prime\prime} a + \&c.$$

$$+ \frac{x^3}{1.3|1} F'''a\, \varphi_{I}^{3} a + \frac{x^4}{1.3|1} F'''a\, \varphi_{I}^{3\prime} a + \&c.$$

$$+ \frac{x^4}{1.4|1} F^{IV}a\, \varphi_{I}^{4} a + \&c.$$

$$+ \&c.$$

Corolario.

Sendo $Fy = y$, será $F'a = a$; $Fa = 1$; $F''a = 0$; $F'''a = 0$; &c. e por consequencia

$$y = a + x\ \varphi a + \frac{x^2}{1.2|1}\varphi' a + \frac{x^3}{1.3|1}\varphi'' a + \&c.$$

SCHOLIO.

Se a equação dada fosse $\varphi(x, y) = fy$, a formula final da solução do problema seria a mesma só com a diferença que a em vez de reprezentar hum valor de y, que satisfaça a equação $y = \varphi y$, reprezentará hum valor de y que satisfaça a equação $fy = \varphi y$. Mas se a equação dada fosse $\varphi(x, y) = yfy$ não só o valor de a deveria reprezentar huma das raizes da equação $yfy = \varphi y$, mas a formula final seria

$$Fy = Fa + x F'a.\ \varphi a + x^2 F'a.\frac{d}{x}\ \varphi a + \frac{x^3}{1.2|1} F'a \frac{d^2}{x}\varphi a + \frac{x^4}{1.3|1} F'a \frac{d^3}{x}\varphi a + \&c.$$

$$+ \frac{x^2}{1.2|1} F''a.\overset{2}{\varphi} a + \frac{x^3}{1.2|1} F''a \frac{d}{x}(\overset{2}{\varphi} a) + \frac{x^4}{1.2|1\ 1.2|1} F''a \frac{d^2}{x}(\overset{2}{\varphi} a) + \&c.$$

$$+ \frac{x^3}{1.3|1} F'''a \overset{3}{\varphi} a + \frac{x^4}{1.3|1} F'''a \frac{d}{x}(\overset{3}{\varphi} a) + \&c.$$

$$+ \frac{x^4}{1.4|1} F^{IV}a \overset{4}{\varphi} a + \&c.$$

$$+ \&c.$$

Semelhantemente se a equação dada fosse $\varphi(x, y) = yfy$, o valor de a em vez de reprezentar huma das raizes da equação $y = \varphi y$, reprezentará huma das raizes da equação $yfy = \varphi y$.

§. 47.°

PROBLEMA XVIII.

Dada a equação $x\varphi(x,y) = y$, desenvolver Fy em função de x.

SOLUÇÃO.

Supondo $x\varphi(x, y) = \Phi(x, y)$ será, como acabamos de ver

$$Fy = Fa + x.F'a.\Phi_{,}a + x.^2 F'a.\frac{\Phi\ a}{1.2|1} + x.^3 F'a.\frac{\Phi\ a}{1.3|1} + x.^4 F'a.\frac{\Phi\ a}{1.4|1} + \&c.$$

$$+ x.^2 \frac{F''a}{1.2|1}\overset{2}{\Phi}_{,}a + x.^3 \frac{F''a}{1.2|1}\overset{2'}{\Phi}_{,}a + x.^4 \frac{F''a}{1.2|1}\frac{\overset{2''}{\Phi}_{,}a}{1.2|1} + \&c.$$

$$+ x^3 \frac{F'''a}{1.3|1} \overset{3}{\Phi}_{/}a + x^4 \frac{F'''a}{1.3|1} \overset{3}{\Phi}_{/}a + \&c.$$

$$+ x^4 \frac{F^{IV}a}{1.4|1} \overset{4}{\Phi}_{/}a + \&c.$$

$$+ \&c.$$

formula na qual a reprezenta huma das raizes da equação $\Phi y = y$. Mas da equação hypothetica

$$x\,\varphi(x,y) = \Phi(x,y)$$

deduz-se

$$\Phi_{/} = \varphi a$$

$$\Phi_{//} = 2\,\varphi_{/} a$$

$$\Phi_{///} = 3\,\varphi_{//} a$$

$$\Phi_{(IV)} = 4\,\varphi_{///} a$$

&c.

logo

$$Fy = Fa + x\,F'a\,\varphi a + x^2\,F'a \frac{d}{\dot{x}} \overset{2}{\varphi} a + x^3 \frac{F'a}{1.2|1} \frac{d^2}{\dot{x}} \varphi a + x^4 \frac{F'a}{1.2|1} \frac{d^3}{\dot{x}} \varphi a + \&c.$$

$$+ x^2 \frac{F''a}{1.2|1} \overset{2}{\varphi} a + x^3 \frac{F''a}{1.2|1} \frac{d}{\dot{x}} (\overset{2}{\varphi} a) + x^4 \frac{F''a}{1.2|1\ 1.2|1} \frac{d^2}{\dot{x}} (\overset{2}{\varphi} a) + \&c.$$

$$+ x^3 \frac{F'''a}{1.3|1} \overset{3}{\varphi} a + x^4 \frac{F'''a}{1.3|1} \frac{d}{\dot{x}} \overset{3}{\varphi} a + \&c.$$

$$+ x^4 \frac{F^{IV}a}{1.4|1} \overset{4}{\varphi} a + \&c.$$

$$+ \&c.$$

Mas como da equação dada $x\,\varphi(x,y) = y$, sempre que a suposição de $x = 0$ não fizer $\varphi(x,y)$ incalculavel, se deprehende, que será necessariamente $y = 0$, segue-se que n'esses cazos a formula que acabamos de expressar se reduzirá a

$$Fy = F. + x\,F.' \varphi. + x^2\,F.' \frac{d}{\dot{x}} \varphi. + x^3 \frac{F.'}{1.2|1} \frac{d^2}{\dot{x}} \varphi. + x^4 \frac{F.'}{1.3|1} \frac{d^3}{\dot{x}} \varphi. + \&c.$$

$$+ x^2 \frac{F.''}{1.2|1} \varphi.^2 + x^3 \frac{F.''}{1.2|1} \frac{d}{x} (\varphi.^2) + x^4 \frac{F.''}{1.2|1\ 1.2|1} \frac{d^2}{\dot{x}} (\varphi.^2) + \&c.$$

$$+ x^3 \frac{F.'''}{1.3|1} \varphi.^3 + x^4 \frac{F.'''}{1.3|1} \frac{d}{\dot{x}} (\varphi.^3) + \&c.$$

$$+ x^4 \frac{F.^{IV}}{1.4|1} \varphi.^4 + \&c.$$

$$+ \&c.$$

Corolario.

Sendo $Fy = y$, será $F.=0$; $F.'=1$; $F.''=0$; $F.'''=0$; &c. e por consequencia

$$y = x\varphi. + x^2 \varphi.' + x^3 \frac{\varphi.''}{1.2|1} + x.^4 \frac{\varphi.'''}{1.3|1} + \&c.$$

Scholio I.

Se a equação dada fosse $x\varphi(x,y) = fy$, a solução do problema não deferiria quanto á fórma; porém a em vez de reprezentar uma raiz da equação $\Phi y = y$, reprezentaria uma das raizes da equação $\Phi y = fy$. O mesmo teria logar sendo a equação dada $x\varphi(x,y) = yfy$, só com a diferença de que neste cazo a reprezentaria uma das raizes da equação $\Phi y = yfy$.

Scholio II.

As mesmas concluzões indicadas em os dois Scholios antecedentes se acharião se em vez de procedermos ao desenvolvimento de Fy nos cazos de ser $\varphi(x,y) = fy$; $x\varphi(x,y) = fy$; e $x\varphi(x,y) = yfy$ da maneira pela qual o fizemos tivessemos nos primeiros dois cazos suposto $fy = z$, e no terceiro $yfy = z$; pois que então determinando pelo methodo da reversão das Series os valores de y em função de z, e reprezentando a função reversa de z por fz, teriamos $y = fz$; e as equações dadas se converterião em $\varphi(x, fz) = z$; e $x\varphi(x, fz) = z$: Fy se converteria em Ffz, e o seu desenvolvimento, reprezentando por b uma das raizes das mesmas equações na supozição de $x = 0$, seria o seguinte

$$Fy = Ffb + xF'fb.\varphi fb + x^2 F'fb \frac{d}{x} \varphi fb + x^3 \frac{F'fb}{1.2|1} \frac{d^2}{x} \varphi fb + \&c.$$

$$+ x^2 \frac{F''fb}{1.2|1} \varphi^2 fb + x^3 \frac{F''fb}{1.2|1} \frac{d}{x} (\varphi^2 fb) + \&c.$$

$$+ x^3 \frac{F'''fb}{1.3|1} \varphi^3 fb + \&c.$$

$$+ \&c.$$

o qual supondo ser a o valor de y correspondente ao valor b de z, se converte precisamente no antecedente, por isso que sendo $y = fz$, he $a = fb$.

§. 48.°

PROBLEMA XIX.

Dada a equação $x = \varphi(x, y, z)$ desenvolver Fx em função de y, e z.

Solução.

Pela propria equação dada se vê que he $Fx = F\varphi(x, y, z)$; e por tanto, reprezentando o algorithmo funcional duplo $F\varphi$ por hum algorithmo funcional simples Φ, teremos $F\varphi(x, y, z) = \Phi(x, y, z)$ e será (§. 19.)

$$Fx = \Phi(x, a, b) + \varphi(y, z)\frac{1}{\varphi'(a, b)}\frac{d}{da}\Phi(x, a, b) + \frac{\varphi^2(y, z)}{1.2|1}\cdot\frac{1}{\varphi'(a, b)}\frac{d}{da}\left(\frac{1}{\varphi'(a, b)}\frac{d}{da}\Phi(x, a, b)\right) + \&c.$$

sendo a e b dois valores correspondentes de z, e y, que satisfação a equação $\varphi(y, z) = 0$. Mas a equação dada mostra que he $\varphi(y, z) = 0$, quando $x = 0$, e por tanto será $\varphi(x, y, z) = 0$, quando for $z = a$, e $y = b$: donde se conclue que he $\Phi(x, y, z) = F.$; e que por consequencia he

$$Fx = F. + \varphi(y, z)\frac{1}{\varphi'(a, b)}\frac{d}{da}F. + \frac{\varphi^2(y, z)}{1.2|1}\cdot\frac{1}{\varphi'(a, b)}\frac{d}{da}\left(\frac{1}{\varphi'(a, b)}\frac{d}{da}F.\right) + \&c.$$

Corolario.

D'aqui se segue que será

$$x = \frac{\varphi(y, z)}{\varphi'(a, b)} + \frac{1}{2}\frac{\varphi^2(y, z)}{1.2|1}\frac{d}{da}\left(\frac{1}{\varphi'^2(a, b)}\right) + \frac{1}{3}\frac{\varphi^3(y, z)}{1.3|1}\frac{d}{da}\left(\frac{1}{\varphi'^3(a, b)}\right) + \frac{1}{4}\frac{\varphi^4(y, z)}{1.4|1}\frac{d}{da}\left(\frac{1}{\varphi'^4(a, b)}\right) + \&c.$$

§. 49.°

Scholio.

Querendo-se o desenvolvimento ordenado relativamente ás potencias de huma qualquer das variaveis y ou z não ha mais do que substituir em logar de $\varphi(y, z)$ e suas potencias os seus competentes desenvolvimentos ordenados segundo as potencias da variavel á qual se quizer referir o desenvolvimento de Fx.

Esta mesma condição se póde preencher de hum modo se não menos trabalhoso ao menos assás elegante: por quanto, segundo mostramos em o §. 13, he

$$\varphi(x,y,z) = \varphi(x,y) + z\frac{d}{z}\varphi(x,y) + \frac{z^2}{1.2|1}\frac{d^2}{z}\varphi(x,y) + \frac{z^3}{1.3|1}\frac{d^3}{z}\varphi(x,y) + \&c.$$

mas sendo $z = 0$, a equação dada se converte em $x = \varphi(x,y)$, expressão da qual se conclue que neste cazo he x função de y. Seja pois fy o valor de x que satisfaça a equação $x = \varphi(x,y)$, será $fy = \varphi(y,fy)$: e por tanto substituindo no desenvolvimento indicado, e reprezentando por $f_1 y$ o valor de $\frac{d}{z}\varphi(x,y)$; por $f_2 y$ o valor de $\frac{d^2}{z}\varphi(x,y)$; e assim por diante teremos

$$x = fy + z f_1 y + \frac{z^2}{1.2|1} f_2 y + \frac{z^3}{1.3|1} f_3 y + \frac{z^4}{1.4|1} f_4 y + \&c. = f(y,z)$$

e por consequencia

$$\begin{aligned} Fx = {} & Ffy + z F'fy.f_1 y + \frac{z^2}{1.2|1} Ffy.f_2 y + \frac{z^3}{1.3|1} F'fy.f_3 y + \frac{z^4}{1.4|1} F'fy.f_4 y \cdots\cdots + \&c. \\ & + \frac{z^2}{1.2|1} F''fy.f_1^2 y + 2\frac{z^3}{1.2|1} F''fy f_1 y.f_2 y + 3\frac{z^4}{1.3|1} F''fy\left(f_1 y.f_3 y + f_2^2 y\right) + \&c. \\ & + \frac{z^3}{1.3|1} F'''fy.f_1^3 y + 3\frac{z^4}{1.3|1} F'''fy.f_1^2 y.f_2 y \cdots + \&c. \\ & + \frac{z^4}{1.4|1} F^{IV}fy.f_1^4 y \cdots\cdots + \&c. \\ & + \&c. \end{aligned}$$

ou reprezentando Ffy por S; $\frac{d}{z}S$ por $E1$; $\frac{d}{z}E1$ por $E2$; $\frac{d}{z}E2$ por $E3$, e assim successivamente

$$Fx = S + z E1 + \frac{z^2}{1.2|1} E2 + \frac{z^3}{1.3|1} E3 + \frac{z^4}{1.4|1} E4 + \&c.$$

Tal he o rezultado a que M. Cousin foi conduzido no fim do Capitulo VI. da sua Introducção á Astronomia Physica achando-se na percizão de dar a solução d'este problema, ainda antes d'elle não rezolvido. Com tudo não devemos dissimular que esta solução analyticamente considerada labora no defeito de depender da rezolução das equações literaes, ou de não se achar expressa a fórma da função f e das suas derivadas pela sua relação com a fórma de φ e das suas derivadas, que unicamente se supoem conhecidas no problema; defeito de que he izenta a primeira solução.

§. 50.º

PROBLEMA XX.

Dada a equação $fx = \varphi(x, y, z)$ desenvolver Fx em função de y e z.

Solução.

Suponhamos que seja $Fx = \Phi(x, y, z)$, será (§. 19)

$$Fx = \Phi(x, a, b) + \varphi(y, z)\,\frac{1}{\varphi'(a, b)}\,\frac{d}{a}\,\Phi(x, a, b) + \frac{\varphi^2(y, z)}{1.2.1}\,\frac{1}{\varphi'(a, b)}\,\frac{d}{a}\left(\frac{1}{\varphi'(a, b)}\,\frac{d}{a}\,\Phi(x, a, b)\right) + \&c.$$

sendo a e b dois valores correspondentes de z, e y, que satisfação a equação $\varphi(y, z) = 0$.

Mas sendo $z = a$, e $y = b$, a equação dada se converte em

$$fx = \psi(x, a, b)$$

e por tanto reprezentando por c huma das raizes d'esta equação teremos que quando for $z = a$, e $y = b$, será necessariamente $x = c$, e que por consequencia he este o valor, que deve substituir-se em logar de x em o desenvolvimento acima indicado. Porém he $\varphi(a, b, c) = Fc$; logo será

$$Fx = Fc + \varphi(y, z)\,\frac{1}{\varphi'(a, b)}\,\frac{d}{a}\,Fc + \frac{\varphi^2(y, z)}{1.2.1}\,\frac{1}{\varphi'(a, b)}\,\frac{d}{a}\left(\frac{1}{\varphi'(a, b)}\,\frac{d}{a}\,Fc\right) + \&c.$$

§. 51.º

Scholio

Este problema tambem se póde rezolver desenvolvendo $\varphi(x, y, z)$ segundo a formula do §. 13. Assim teremos

$$fx = \varphi(x, y) + z\,\frac{d}{z}\,\varphi(x, y) + \frac{z^2}{1.2.1}\,\frac{d^2}{z}\,\varphi(x, y) + \frac{z^3}{1.3.1}\,\frac{d^3}{z}\,\varphi(x, y) + \&c.$$

mas sendo $z = 0$, a equação dada convertesse em $fx = \varphi(x, y)$ e por tanto se reprezentarmos por fy o valor de x deduzido d'esta equação teremos que neste cazo será

$$f\,fy = \varphi(x, y)$$

e por consequencia substituindo $f\,fy$ em logar de $\varphi(x, y)$ no desenvolvimento de fx, e reprezentando por $f_1\,fy$; $f_2\,fy$; $f_3\,fy$; &c. os valores par-

ticulares das fluxões successivas de $\varphi(x, y, z)$ relativas a z rezultantes da supozição de $z=0$, o dito desenvolvimento se reduzirá a

$$fx = ff y + z f_1 f y + \frac{z^2}{1.2|1} f_2 f y + \frac{z^3}{1.3|1} f_3 f y + \&c. = f f(y, z)$$

seja α huma das raizes da equação $fx=0$, será (§. 11.)

$$Fx = F\alpha + fx \frac{1}{f'\alpha} \frac{d}{\alpha} F\alpha + \frac{f^2 x}{1.2|1} \cdot \frac{1}{f'\alpha} \frac{d}{\alpha} \left(\frac{1}{f'\alpha} \frac{d}{\alpha} F\alpha \right) + \frac{f^3 x}{1.3|1} \cdot \frac{1}{f'\alpha} \frac{d}{\alpha} \left(\frac{1}{f'\alpha} \frac{d}{\alpha} \left(\frac{1}{f'\alpha} \frac{d}{\alpha} F\alpha \right) \right) + \&c.$$

e por consequencia

$$Fx = F\alpha + ff(y, z) \cdot \frac{1}{f'\alpha} \frac{d}{\alpha} F\alpha + \frac{f^2 f(y, z)}{1.2|1} \frac{1}{f'\alpha} \frac{d}{\alpha} \left(\frac{1}{f'\alpha} \frac{d}{\alpha} F\alpha \right) + \frac{f^3 f(y, z)}{1.3|1} \frac{1}{f'\alpha} \frac{d}{\alpha} \left(\frac{1}{f'\alpha} \frac{d}{\alpha} \left(\frac{1}{f'\alpha} \frac{d}{\alpha} F\alpha \right) \right) + \&c.$$

§. 52.°

SCHOLIO II.

Querendo se o desenvolvimento de Fx ordenado segundo as potencias inteiras de huma das variaveis y, ou z, então advertindo que da equação $fx = ff(y, z)$ se conclue que he $x = f(y, z)$, reconhecer-se-ha que supondo $dy = 1$, he

$$\begin{aligned} Ff(y, z) = F f y + z F' f y . f' y + \frac{z^2}{1.2|1} F' f y . f'' y + \frac{z^3}{1.3|1} F' f y . f''' y \quad + \&c. \\ + \frac{z^2}{1.2|1} F'' f y . f'^2 y + 2 \frac{z^3}{1.2|1} F'' f y . f' y . f'' y + \&c. \\ + \frac{z^3}{1.3|1} F''' f y . f'^3 y \quad + \&c. \\ + \&c. \end{aligned}$$

Se em vez de supor-se $dy=1$, se supozer $dx=1$, ou $dfy=1$, será

$$Fx = F f y + z F' f y + \frac{z^2}{1.2|1} F'' f y + \frac{z^3}{1.3|1} F''' f y + \&c.$$

Entre tanto esta solução labora no mesmo inconveniente da mencionada no Scholio do problema antecedente.

§. 53.°

PROBLEMA. XXI.

Dada a equação $fx = \varphi(x, y, z)$ desenvolver $F(x, y, z)$ em função de y e z.

SOLUÇÃO.

Segundo vimos em o §. 19. he

$$F(x,y,z) = F(x,a,b) + \varphi(y,z)\frac{1}{\varphi'(a,b)}\frac{d}{a}F(x,a,b) + \frac{\varphi^2(y,z)}{1.2|1}\frac{1}{\varphi'(a,b)}\frac{d}{a}\left(\frac{1}{\varphi'(a,b)}\frac{d}{a}F(x,a,b)\right) + \&c.$$

sendo a, e b dois valores correspondentes de z, e y, que satisfação a equação $\varphi(y,z)=0$. Mas sendo estes os valores de z, e y a equação proposta se reduz a

$$fx = \varphi(x,a,b)$$

e por tanto sendo c hum dos valores de x, que satisfazem a esta equação será

$$F(x,y,z) = F(a,b,c) + \varphi(y,z)\frac{1}{\varphi'(a,b)}\frac{d}{a}F(a,b,c) + \frac{\varphi^2(y,z)}{1.2|1}\frac{1}{\varphi'(a,b)}\frac{d}{a}\left(\frac{1}{\varphi'(a,b)}\frac{d}{a}F(a,b,c)\right) + \&c.$$

NOTA.

Servindo-nos do segundo desenvolvimento de $F(x,y,z)$ exposto no citado §. 19. teriamos achado

$$F(x,y,z) = F(a,b,c) + \varphi(y,z)\frac{1}{\varphi_1(a,b)}\frac{d}{b}F(a,b,c) + \frac{\varphi^2(y,z)}{1.2|1}\frac{1}{\varphi_1(a,b)}\frac{d}{b}\left(\frac{1}{\varphi_1(a,b)}\frac{d}{b}F(a,b,c)\right) + \&c.$$

COROLARIO I.

Sendo identicos os algorithmos funcionaes F, e φ, se neste desenvolvimento escrevermos φ em logar de F, e $\varphi'(a,b,c)$ em logar de $\frac{d}{a}F(a,b,c)$ acharemos

$$fx = \varphi(a,b,c) + \varphi(y,z)\frac{1}{\varphi'(a,b)}\varphi'(a,b,c) + \frac{\varphi^2(y,z)}{1.2|1}\frac{1}{\varphi'(a,b)}\frac{d}{a}\left(\frac{1}{\varphi'(a,b)}\varphi'(a,b,c)\right) + \&c.$$

ou

$$fx = fc + \varphi(y,z)\frac{1}{\varphi'(a,b)}f'c + \frac{\varphi^2(y,z)}{1.2|1}\frac{1}{\varphi'(a,b)}\frac{d}{a}\left(\frac{1}{\varphi'(a,b)}f'c\right) + \&c.$$

COROLARIO II.

Reprezentando por Φx a função reversa de $\varphi(y,z)$; isto he, a função de x, que pela aplicação do methodo da reversão das Series se deduziria do desenvolvimento de fx para exprimir o valor de $\varphi(y,z)$, se terá por meio da substituição no desenvolvimento antecedente de $F(x,y,z)$

$$F(x,y,z) = F(a,b,c) + \Phi x \frac{1}{\varphi'(a,b)} \frac{d}{da} F(a,b,c) + \frac{\Phi^2 x}{1.2|1} \frac{1}{\varphi'(a,b)} \frac{d}{da} \left(\frac{1}{\varphi'(a,b)} \frac{d}{da} F(a,b,c) \right) + \&c.$$

Scholio.

Se a equação dada fosse $fx = y\varphi' x,y,z)$ acharíamos igualmente

$$F(x,y,z) = F(a,b,c) + \varphi(y,z) \frac{1}{\varphi'(a,b)} \frac{d}{da} F(a,b,c) + \frac{\varphi^2(y,z)}{1.2|1} \cdot \frac{1}{\varphi'(a,b)} \frac{d}{da} \left(\frac{1}{\varphi'(a,b)} \frac{d}{da} F(a,b,c) \right) + \&c.$$

só com a diferença que c em vez de ser huma das raizes da equação

$$fx = \varphi(x,a,b)$$

seria huma das raizes da equação

$$fx = b\,\varphi(x,a,b).$$

Querendo-se referir o desenvolvimento não á função $\varphi(y,z)$, mas á função $y\varphi(y,z)$ então como da supozição de $y\varphi(y,z) = 0$ rezulta $y = 0$, se reprezentarmos por a huma das raizes da equação $\varphi z = 0$, e por c huma das raizes da equação $fx = 0$, acharemos

$$F(x,yz) = F(a,c) + y\,\varphi(y,z) \frac{1}{\varphi' a} \frac{d}{da} F(a,c) + \frac{y^2 \varphi^2(y,z)}{1.2|1} \frac{1}{\varphi' a} \frac{d}{da} \left(\frac{1}{\varphi' a} \frac{d}{da} F(a,c) \right) + \&c.$$

§. 54.°

PROBLEMA XXII.

Dadas as equações $x = \varphi(x,y,z)$ e $y = f(x,y,z)$, desenvolver Fx em função de z.

Soluçã o.

Seja $\Phi(y,z)$ a função de y e z, que exprima o valor de x deduzido da primeira das equações dadas, e $f(x,z)$ a função de x, e z, que exprima o valor de y deduzido da segunda. Substituindo esta segunda função na primeira teremos

$$x = \Phi\left(f(x,z),z\right)$$

e reprezentando $\Phi\left(f(x,z),z\right)$ por $F(x,z)$, teremos

$$x = F(x,z)$$

e por tanto será (§. 46. Corol.)

$$x = a + z.F'a + \frac{z^2}{1.2|1} F''a + \frac{z^3}{1.3|1} F'''a + \frac{z^4}{1.4|1} F^{IV}a + \&c.$$

formula na qual a reprezenta huma das raizes da equação $a = \mathrm{F}x$, ou $x = \Phi\, \mathrm{f}\, x$, e da qual se segue que he

$$\mathrm{F}x = \mathrm{F}a + z\,\mathrm{F}'a.\,\mathrm{F}_{/}a + \frac{z^2}{1.2|1}\,\mathrm{F}'a.\,\mathrm{F}_{//}a + \frac{z^3}{1.3|1}\,\mathrm{F}'a.\,\mathrm{F}_{///}a \quad + \&c.$$

$$+ \frac{z^2}{1.2|1}\,\mathrm{F}''a.\,\mathrm{F}^{2}_{/}a + 2\,\frac{z^3}{1.2|1}\,\mathrm{F}''a.\,\mathrm{F}_{/}a.\,\mathrm{F}_{//}a + \&c.$$

$$+ \frac{z^3}{1.3|1}\,\mathrm{F}'''a.\,\mathrm{F}^{3}_{/}a. \quad + \&c.$$

$$+ \&c.$$

mas da equação hypothetica

$$\mathrm{F}(x, z) = \Phi\big(\mathrm{f}(x, z), z\big)$$

deduz-se

$$\mathrm{F}a = \Phi\, \mathrm{f}a$$

e por consequencia

$$\mathrm{F}x = \mathrm{F}a + z\,\mathrm{F}'a\,\Phi_{/}\mathrm{f}a.\,\mathrm{f}_{/}a + \frac{z^2}{1.2|1}\,\mathrm{F}'a\,\big(\Phi_{//}\mathrm{f}a.\,\mathrm{f}^{2}_{/}a + \Phi_{/}\mathrm{f}a.\,\mathrm{f}_{//}a\big) + \frac{z^3}{1.3|1}\,\mathrm{F}'a\,\big(\Phi_{///}\mathrm{f}a.\,\mathrm{f}^{3}_{/}a + 3\,\Phi_{//}\mathrm{f}a.\,\mathrm{f}_{/}a.\,\mathrm{f}_{//}a + \Phi_{/}\mathrm{f}a.\,\mathrm{f}_{///}a\big) + \&c.$$

$$+ \frac{z^2}{1.2|1}\,\mathrm{F}''a\;\Phi^{2}_{/}\mathrm{f}a.\,\mathrm{f}^{2}_{/}a. \;\text{- - - - -}\; + 2\,\frac{z^3}{1.2|1}\,\mathrm{F}''a.\,\Phi_{/}\mathrm{f}a.\,\mathrm{f}_{/}a\,\big(\Phi_{//}\mathrm{f}a.\,\mathrm{f}^{2}_{/}a + \Phi_{/}\mathrm{f}a.\,\mathrm{f}_{//}a\big) \;\text{- - - -}\; + \&c.$$

$$+ \frac{z^3}{1.3|1}\,\mathrm{F}'''a.\,\Phi^{3}_{/}\mathrm{f}a.\,\mathrm{f}^{3}_{/}a \;\text{- - - - - - - - - - - - - - - -}\; + \&c.$$

$$+ \&c.$$

Corolario.

D'aqui se deduz

$$x = a + z\,\Phi_{/}\mathrm{f}a.\,\mathrm{f}_{/}a + \frac{z^2}{1.2|1}\,\big(\Phi_{//}\mathrm{f}a.\,\mathrm{f}^{2}_{/}a + \Phi_{/}\mathrm{f}a.\,\mathrm{f}_{//}a\big) + \frac{z^3}{1.3|1}\,\big(\Phi_{///}\mathrm{f}a.\,\mathrm{f}^{3}_{/}a + 3\,\Phi_{//}\mathrm{f}a.\,\mathrm{f}_{/}a.\,\mathrm{f}_{//}a + \Phi_{/}\mathrm{f}a.\,\mathrm{f}_{///}a\big) + \&c.$$

§. 55.º

PROBLEMA XXIII.

Dadas as equações $\varphi(x, y) = x$, e $f(x, y) = y$ determinar os valores de x, e y.

Solução.

Segundo a lei demonstrada em os §.§. 19 e 20 he

$$\varphi(x,y) = \varphi(a,b) + f(x,y)\,\frac{1}{f'(a,b)}\,\frac{d}{da}\,\varphi(a,b) + \frac{f^2(x,y)}{1.2|1}\,\frac{1}{f'(a,b)}\,\frac{d}{da}\left(\frac{1}{f'(a,b)}\,\frac{d}{da}\,\varphi(a,b)\right) + \&c.$$

reprezentando a, e b os valores correspondentes de x, e y, que satisfazem a equação $f(x,y) = 0$. Mas como no Problema actual a supozição de $f(x,y) = 0$ faz $y = 0$, e $\varphi a = a$, será

$$x = a + yf'a^{-1} + \frac{y^2}{1.2|1}f'a^{-1}\,d(f'a^{-1}) + \frac{y^3}{1.3|1}f'a^{-1}\,d\left(f'a^{-1}\,d(f'a^{-1})\right) + \&c.$$

Se designarmos esta Serie por fy, e substituirmos fy em logar de x em qualquer das equações dadas, por exemplo, na equação $f(x,y) = y$, teremos $f(y,fy) = y$; e por tanto reprezentando por c hum dos valores de y, que satisfazem a esta equação, será

$$x = a + cf'a^{-1} + \frac{c^2}{1.2|1}f'a^{-1}\,d(f'a^{-1}) + \frac{c^3}{1.3|1}f'a^{-1}\,d\left(f'a^{-1}\,d(f'a^{-1})\right) + \&c.$$

Se tivessemos começado por desenvolver $f(x,y)$ em huma Serie ordenada segundo as potencias inteiras de $\varphi(x,y)$ teriamos achado

$$y = b + e\,\varphi_1 b^{-1} + \frac{e^2}{1.2|1}\varphi_1 b^{-1}\,d(\varphi_1 b^{-1}) + \frac{e^3}{1.3|1}\varphi_1 b^{-1}\,d\left(\varphi_1 b^{-1}\,d(\varphi_1 b^{-1})\right) + \&c.$$

sendo b huma das raizes da equação $\varphi y = 0$, e e hum dos valores de x que satisfazem a equação $\varphi(x, \beta x) = x$, na qual βx reprezenta a Serie

$$b + x\,\varphi_1 b^{-1} + \frac{x^2}{1.2|1}\varphi_1 b^{-1}\,d(\varphi_1 b^{-1}) + \frac{x^3}{1.3|1}\varphi_1 b^{-1}\,d\left(\varphi_1 b^{-1}\,d(\varphi_1 b^{-1})\right) + \&c.$$

Corolario.

Dos valores achados de x, e y se conclue que será

$$Fx = Fa + c.\,F'a.f'a^{-1} + \frac{c^2}{1.2|1}F'a.f'a^{-1}\,d(f'a^{-1}) + \frac{c^3}{1.3|1}F'a.f'a^{-1}\,d\left(f'a^{-1}\,d(f'a^{-1})\right) + \&c.$$

$$+ \frac{c^2}{1.2|1}F''a.f'a^{-2} \text{ - - - } + 3\,\frac{c^3}{1.3|1}F''a.f'a^{-2}\,d(f'a^{-1}) \text{ - - - } + \&c.$$

$$+ \frac{c^3}{1.3|1}F'''a.f'a^{-3} \text{ - - - - - - - } + \&c.$$

$$+ \&c.$$

e

$$Fy = Fb + e\,F_1 b.\,\varphi_1 b^{-1} + \frac{e^2}{1.2|1}F_1 b.\,\varphi_1 b^{-1}\,d(\varphi_1 b^{-1}) + \frac{e^3}{1.3|1}F_1 b.\,\varphi_1 b.\,d\left(\varphi_1 b^{-1}\,d(\varphi_1 b^{-1})\right) + \&c.$$

$$+ \frac{e^2}{1.2|1}F_{11} b.\,\varphi_1 b. \text{ - - - } + 3\,\frac{e^3}{1.3|1}F_{11} b.\,\varphi_1 b^{-2}\,d(\varphi_1 b^{-1}) \text{ - - - - } + \&c.$$

$$+\frac{c^3}{1.3|1}\,F_{III}b.\,\overset{-3}{\varphi_I}b \;\cdots\cdots + \&c.$$

$$+ \&c.$$

§. 56.º

PROBLEMA XXIV.

Dadas as duas equações $\varphi(x,y)=\beta x$; e $f(x,y)=\mathrm{f}y$ determinar os valores de x e y.

Solução.

Segundo a mesma lei mencionada em o §. antecedente se acha ser

$$\beta x=\varphi(a,b)+\mathrm{f}y\frac{1}{f'(a,b)}\frac{d}{a}\varphi(a,b)+\frac{\mathrm{f}^2y}{1.2|1}\frac{1}{f'(a,b)}\frac{d}{a}\left(\frac{1}{f'(a,b)}\frac{d}{a}\varphi(a,b)\right)+\&c.$$

reprezentando a, e b os valores correspondentes de x, e y, que satisfazem a equação $f(x,y)=0$: mas como no Problema actual a supozição de $f(x,y)=0$ faz $\mathrm{f}y=0$, será b huma das raizes da equação $\mathrm{f}y=0$, e por consequencia a huma das raizes da equação $f(x,b)=0$. Ora estes valores de x, e y fazem $\varphi(a,b)=\beta a$; e por consequencia será

$$\beta x=\beta a+\mathrm{f}y\frac{1}{f'(a,b)}\frac{d}{a}\beta a+\frac{\mathrm{f}^2y}{1.2|1}\frac{1}{f'(a,b)}\frac{d}{a}\left(\frac{1}{f'(a,b)}\frac{d}{a}\beta a\right)+\frac{\mathrm{f}^3y}{1.3|1}\frac{1}{f'(a,b)}\frac{d}{a}\left(\frac{1}{f'(a,b)}\frac{d}{a}\left(\frac{1}{f'(a,b)}\frac{d}{a}\beta a\right)\right)+\&c.$$

D'esta expressão se deduz

$$\begin{aligned}\mathrm{F}x=\mathrm{F}a+\mathrm{f}y.\,\mathrm{F}'a.\frac{\beta'a}{f'(a,b)}&+\frac{\mathrm{f}^2y}{1.2|1}\mathrm{F}'a.\frac{1}{f'(a,b)}\frac{d}{a}\left(\frac{\beta'a}{f'(a,b)}\right)+\frac{\mathrm{f}^3y}{1.3|1}\mathrm{F}'a.\frac{1}{f'(a,b)}\frac{d}{a}\left(\frac{1}{f'(a,b)}\frac{d}{a}\left(\frac{\beta'a}{f'(a,b)}\right)\right)+\&c.\\&+\frac{\mathrm{f}^2y}{1.2|1}\mathrm{F}''a.\left(\frac{\beta'a}{f'(a,b)}\right)^2\qquad+\frac{3}{2}\frac{\mathrm{f}^3y}{1.3|1}\mathrm{F}''a.\frac{1}{f'(a,b)}\frac{d}{a}\left(\frac{\beta'a}{f'(a,b)}\right)^2\;\cdots+\&c.\\&+\frac{\mathrm{f}^3y}{1.3|1}\mathrm{F}'''a.\left(\frac{\beta'a}{f'(a,b)}\right)^3\;\cdots\cdots\cdots+\&c.\\&+\&c.\end{aligned}$$

e d'esta

$$\alpha=a+\mathrm{f}y\frac{\beta'a}{f'(a,b)}+\frac{\mathrm{f}^2y}{1.2|1}\frac{1}{f'(a,b)}\frac{d}{a}\left(\frac{\beta'a}{f'(a,b)}\right)+\frac{\mathrm{f}^3y}{1.3|1}\frac{1}{f'(a,b)}\frac{d}{a}\left(\frac{1}{f'(a,b)}\frac{d}{a}\left(\frac{\beta'a}{f'(a,b)}\right)\right)+\&c.$$

se dezignarmos esta Serie por Φy, e substituirmos Φy em logar de x na equação $f(x,y)=\mathrm{f}y$, teremos $f(y,\Phi y)=\mathrm{f}y$; e por tanto reprezentando por c hum dos valores de y, que satisfazem a esta equação teremos finalmente

$$x = a + fc\frac{\beta' a}{f'(a,b)} + \frac{f^2 c}{1.2|1}\frac{1}{f'(a,b)}\frac{d}{a}\left(\frac{\beta' a}{f'(a,b)}\right) + \frac{f^3 c}{1.3|1}\frac{1}{f'(a,b)}\frac{d}{a}\left(\frac{1}{f'(a,b)}\frac{d}{a}\left(\frac{\beta' a}{f'(a,b)}\right)\right) + \&c.$$

Pelo mesmo estilo se acharia a expressão de y; o que deixo de fazer não só por brevidade; mas por que na prática da rezolução das equações a duas incognitas da fórma indicada no Problema, este trabalho he inutil, visto que o valor de y se obtem por meio da rezolução da equação

$$f(y, \Phi y) = fy.$$

§. 57.°

PROBLEMA. XXV.

Dadas as duas equações $y\,\phi(x,y) = \beta x$; e $x f(x,y) = fy$ determinar os valores de x, e y.

Solução.

Suponha-se $y\,\phi(x,y) = F(x,y)$; e $x f(x,y) = \Phi(x,y)$: as duas equações dadas se converterão em $F(x,y) = \beta x$; e $\Phi(x,y) = fy$; e por tanto teremos para x a mesma expressão achada em o §. antecedente, só com a diferença que sendo b huma das raizes da equação $fy = 0$, será $a = 0$, por ser a huma das raizes da equação $x f(x,b) = 0$, e por consequencia teremos

$$x = fc\frac{\beta.'}{f'b} + \frac{f^2 c}{1.2|1}\frac{1}{f'b}\frac{d}{\dot{x}}\left(\frac{\beta.'}{f'b}\right) + \frac{f^3 c}{1.3|1}\frac{1}{f'b}\frac{d}{\dot{x}}\left(\frac{1}{f'b}\frac{d}{\dot{x}}\left(\frac{\beta.'}{f'b}\right)\right) + \&c.$$

sendo $\beta.' = \frac{d}{\dot{x}}\beta x$; $f'b = \frac{d}{\dot{x}}\beta(x,b)$, e c o valor de y, que satisfaça a equação

$$\Gamma y.\, f(y, \Gamma y) = fy$$

expressão na qual Γy reprezenta a Serie

$$fy\frac{\beta'}{f'b} + \frac{f^2 y}{1.2|1}\frac{1}{f'b}\frac{d}{\dot{x}}\left(\frac{\beta'}{f'b}\right) + \frac{f^3 y}{1.3|1}\frac{1}{f'b}\frac{d}{\dot{x}}\left(\frac{1}{f'b}\frac{d}{\dot{x}}\left(\frac{\beta'}{f'b}\right)\right) + \&c.$$

Corolario I.

Da expressão de x se deduz

$$Fx = F. + fc\,F.'\frac{\beta'}{f'b} + \frac{f^2 c}{1.2|1}F.'\frac{1}{f'b}\frac{d}{\dot{x}}\left(\frac{\beta'}{f'b}\right) + \frac{f^3 c}{1.3|1}F.'\frac{1}{f'b}\frac{d}{\dot{x}}\left(\frac{1}{f'b}\frac{d}{\dot{x}}\left(\frac{\beta'}{f'b}\right)\right) + \&c.$$

$$+\frac{f^2c}{1.2|1}F.''\left(\frac{\beta.'}{f'b}\right)^2 \text{ ---- } +\frac{1}{2}\frac{f^3c}{1.3|1}F.''\frac{1}{f'b}\frac{d}{x}\left(\frac{\beta.'}{f'b}\right)^2 \text{ --- } + \&c.$$

$$+\frac{f^3c}{1.3|1}F.'''\left(\frac{\beta.'}{f'b}\right)^3 \text{ ------- } + \&c.$$

$$+ \&c.$$

Corolario II.

Se as equações dadas fossem $y\varphi(x,y)=-\beta x$; e $xf(x,y)=-fy$, os valores de x e Fx não defeririam dos precedentes senão em a mudança de signal de todos os termos aonde se acham potencias impares de fc.

§. 58?

PROBLEMA XXVI.

Dadas as equações $\varphi(x,y)=0$, e $f(x,y)=0$, achar os valores de x, e y.

Solução.

Desenvolvendo as funções dadas pelo modo indicado no §. 9. se tem

$$\varphi(x,y)=\varphi x+y\frac{d}{y}\varphi x+\frac{y^2}{1.2|1}\frac{d^2}{y}\varphi x+\frac{y^3}{1.3|1}\frac{d^3}{y}\varphi x+\&c.$$

e

$$f(x,y)=fy+x\frac{d}{x}fy+\frac{x^2}{1.2|1}\frac{d^2}{x}fy+\frac{x^3}{1.3|1}\frac{d^3}{x}fy+\&c.$$

expressões das quaes, atentas as condições do problema, e reprezentando por $\Phi(x,y)$ a Serie

$$\frac{d}{y}\varphi x+\frac{y}{1.2|1}\frac{d^2}{y}\varphi x+\frac{y^2}{1.3|1}\frac{d^3}{y}\varphi x+\&c.$$

e por $f(x,y)$ a Serie

$$\frac{d}{x}fy+\frac{x}{1.2|1}\frac{d^2}{x}fy+\frac{x^2}{1.3|1}\frac{d^3}{x}fy+\&c.$$

se deduzem as duas seguintes equações

$$y\Phi(x,y)=-\varphi x\text{; . e . . }xf(x,y)=-fy$$

as quaes nos mostram que a solução d'este problema depende da solução do antecedente, e que por tanto he

$$x=-fc\frac{\varphi.'}{f'b}+\frac{f^2c}{1.2|1}\frac{1}{f'b}\frac{d}{x}\left(\frac{\varphi.'}{f'b}\right)-\frac{f^3c}{1.3|1}\frac{1}{fb}\frac{d}{x}\left(\frac{1}{f'b}\frac{d}{x}\left(\frac{\varphi.'}{f'b}\right)\right)+\&c.$$

e

$$y = -\varphi c' \frac{f.}{\Phi_{,} a} + \frac{\varphi^2 c'}{1.2|1} \frac{1}{\Phi_{,} a} \frac{d}{y} \left(\frac{f.}{\Phi_{,} a}\right) - \frac{\varphi^3 c'}{1.3|1} \frac{1}{\Phi_{,} a} \frac{d}{y} \left(\frac{1}{\Phi_{,} a} \frac{d}{y} \left(\frac{f.}{\Phi_{,} a}\right)\right) + \&c.$$

sendo b huma das raizes da equação $fy = 0$; a huma das raizes da equação $\varphi x = 0$; c huma das raizes da equação $\Gamma y . f(y, \Gamma y) = -fy$; c' huma das raizes da equação $\Theta x \Phi(x, \Theta x) = -\varphi x$;

$$\Gamma y = -fy . \frac{\varphi.'}{f' b} + \frac{f^2 y}{1.2|1} \frac{1}{f' b} \frac{d}{x} \left(\frac{\varphi.'}{f' b}\right) - \frac{f^3 y}{1.3.1} \frac{1}{f' b} \frac{d}{x} \left(\frac{1}{f' b} \frac{d}{x} \left(\frac{\varphi.'}{f' b}\right)\right) + \&c.$$

e

$$\Theta x = -\varphi x \frac{f.}{\Phi_{,} a} + \frac{\varphi^2 x}{1.2|1} \frac{1}{\Phi_{,} a} \frac{d}{y} \left(\frac{f.}{\Phi_{,} a}\right) - \frac{\varphi^3 x}{1.3|1} \frac{1}{\Phi_{,} a} \frac{d}{y} \left(\frac{1}{\Phi_{,} a} \frac{d}{y} \left(\frac{f.}{\Phi_{,} a}\right)\right) + \&c$$

Efeituando as fluxionações indicadas em os valores de x, e y; elles se reduzem a

$$x = -fc\, \varphi.' f' b^{-1} + \frac{f^2 c}{1.2|1} \varphi.'' f' b^{-2} - \frac{f^3 c}{1.3|1} \varphi.''' f' b^{-3} \dots\dots\dots + \&c.$$

$$- \frac{f^2 c}{1.2|1} \varphi.' f'' b\, f' b^{-3} + \frac{f^3 c}{1.3|1} \varphi.'' 3 f'' b . f' b^{-4} \dots\dots - \&c.$$

$$- \frac{f^3 c}{1.3|1} \varphi.' \left(3 f''^2 b - f' b . f''' b\right) f' b^{-5} + \&c.$$

$$- \&c.$$

e

$$y = -\varphi c' f_{,} \Phi a^{-1}_{,} + \frac{\varphi^2 c'}{1.2|1} f._{,,} \Phi a^{-2}_{,} \dots - \frac{\varphi^3 c'}{1.3|1} f._{,,,} \Phi a^{-3}_{,} \dots\dots\dots + \&c.$$

$$- \frac{\varphi^2 c'}{1.2|1} f._{,} \Phi a_{,,} \Phi a^{-3}_{,} + \frac{\varphi^3 c'}{1.3|1} f._{,,} 3 \Phi a_{,,} \Phi a^{-4}_{,} \dots\dots\dots - \&c.$$

$$- \frac{\varphi^3 c'}{1.3|1} f._{,} \left(3 \Phi a^{-2}_{,,} - \Phi a_{,} \Phi a_{,,,}\right) \Phi a^{-5}_{,} + \&c.$$

$$- \&c.$$

mas das nossas equações hypotheticas se deduz

$$f.' b = \tfrac{1}{2} f'' b$$

$$f.'' b = \tfrac{1}{3} f''' b$$

$$f.''' b = \tfrac{1}{4} f^{IV} b$$

&c.

e

$$\Phi_{,} a = \tfrac{1}{2} \varphi_{,,} a$$

$$\Phi_{,,} a = \tfrac{1}{3} \varphi_{,,,} a$$

$$\Phi_{III}a = \tfrac{1}{4}\Phi_{IV}a$$

&c.

e por tanto feitas as substituições convenientes se achará

$$x = -2fc\ \varphi.' f'''\overline{b}^{1} + 2f^2 c\,\varphi.'' f'''\overline{b}^{2} - \frac{2.2}{3} f^3 c\,\varphi.''' f'''\overline{b}^{3} \cdots\cdots\cdots\cdots + \&c.$$

$$- \frac{2^2}{3} f^2 c\,\varphi.' f'''b.\,\overline{f'''b}^{3} + \frac{2.3}{3} f^3 c\,\varphi.''\, f'''b.\,\overline{f'''b}^{4} \cdots\cdots\cdots - \&c.$$

$$- \frac{2.4}{3} f^3 c\,\varphi.' \left(\tfrac{1}{3} f'''b - \frac{1}{2.4} f''b\, f^{IV}b\right) \overline{f'''b}^{5} + \&c.$$

$$- \&c.$$

e

$$y = -2\varphi c' f_{,}\,\overline{\varphi a}^{1} + 2\varphi^2 c' f_{,,}\,\overline{\varphi a}^{2} - \frac{2^2}{3}\varphi^3 c' f_{,,,}\,\overline{\varphi a}^{3} \cdots\cdots\cdots\cdots + \&c.$$

$$- \frac{2.2}{3}\varphi^2 c' f_{,}\,\varphi_{,,,}a.\,\overline{\varphi a}^{3} + \frac{2^3}{3}\varphi^3 c' f_{,,}\,\varphi_{,,,}a.\,\overline{\varphi a}^{4} \cdots\cdots\cdots\cdots - \&c.$$

$$- \frac{2^4}{3}\varphi^3 c' f_{,}\left(\tfrac{1}{3}\varphi^2_{,,,}a - \frac{1}{2.4}\varphi_{,,}a.\,\varphi_{,IV}a\right)\overline{\varphi a}^{5} + \&c.$$

$$- \&c.$$

Corolario.

Das primeiras expressões de x, e y, cuja lei he assás patente, se conclue que he

$$Fx = F. - fc\,F.'\,\frac{\varphi.'}{f'b} + \frac{f^2c}{1.2|1}F.'\,\frac{1}{f'b}\frac{d}{x}\left(\frac{\varphi.'}{f'b}\right) - \frac{f^3c}{1.3|1}F.'\,\frac{1}{f'b}\frac{d}{x}\left(\frac{1}{f'b}\frac{d}{x}\left(\frac{\varphi.'}{f'b}\right)\right) + \&c.$$

$$+ \frac{f^2c}{1.2|1}F.''\left(\frac{\varphi.'}{f'b}\right)^2 \cdots - \frac{f^3c}{1.3|1}F.''\,\frac{1}{f'b}\frac{d}{x}\left(\frac{\varphi.'}{f'b}\right)^2 \cdots + \&c.$$

$$- \frac{f^3c}{1.3|1}F.'''\left(\frac{\varphi.'}{f'b}\right)^3 \cdots\cdots\cdots + \&c.$$

$$+ \&c.$$

e

$$Fy = F. - \varphi c'\,F_{,}\,\frac{f_{,}}{\Phi_{,}a} + \frac{\varphi^2 c'}{1.2|1}F_{,}\,\frac{1}{\Phi_{,}a}\frac{d}{y}\left(\frac{f_{,}}{\Phi_{,}a}\right) - \frac{\varphi^3 c'}{1.3|1}F_{,}\,\frac{1}{\Phi_{,}a}\frac{d}{y}\left(\frac{1}{\Phi_{,}a}\frac{d}{y}\left(\frac{f_{,}}{\Phi_{,}a}\right)\right) + \&c.$$

$$+ \frac{\varphi^2 c'}{1.2|1}F_{,,}\left(\frac{f_{,}}{\Phi_{,}a}\right)^2 - \frac{\varphi^3 c'}{1.3|1}F_{,}\,\frac{1}{\Phi_{,}a}\frac{d}{y}\left(\frac{f_{,}}{\Phi_{,}a}\right)^2 \cdots + \&c.$$

$$- \frac{\varphi^3 c'}{1.3|1}F_{,,,}\left(\frac{f_{,}}{\Phi_{,}a}\right)^3 \cdots\cdots + \&c.$$

$$+ \&c.$$

§. 59.°

PROBLEMA XXVII.

Dadas as equações $\varphi(x,y,z)=x$; $f(x,y,z)=y$; e $\Phi(x,y,z)=z$ determinar os valores de x, y, e z.

Solução.

Segundo a lei indicada em o §. 22 he

$$x=\varphi(a,b,c)+y\frac{1}{f'(a,b,c)}\frac{d}{a}\varphi(a,b,c)+\frac{y^2}{1.2|1}\frac{1}{f'(a,b,c)}\frac{d}{a}\left(\frac{1}{f'(a,b,c)}\frac{d}{a}\varphi(a,b,c)\right)+\&c.$$

reprezentando a, b, e c os valores correspondentes de x, y, e z, que satisfazem a equação $f(x,y,z)=0$. Mas como no problema actual a supozição de $f(x,y,z)=0$ faz $y=0$, e $\varphi(a,b,c)=\varphi(a,c)=a$; e para obtermos os valores de a e de c nos dá as duas equações

$$\varphi(x,z)=x, \text{ e } \Phi(x,z)=z$$

as quaes devemos rezolver pelo methodo exposto no §. 55 teremos

$$x=a+y\overline{f'(a,c)}^{-1}+\frac{y^2}{1.2|1}\overline{f'(a,c)}^{-1}\frac{d}{a}\overline{f'(a,c)}^{-1}+\frac{y^3}{1.3|1}\overline{f'(a,c)}^{-1}\frac{d}{a}\left(\overline{f'(a,c)}^{-1}\frac{d}{a}\overline{f'(a,c)}^{-1}\right)+\&c.$$

se designarmos esta Serie por fy, e substituirmos fy em logar de x nas equações

$$\varphi(x,y,z)=x; \text{ e } \Phi(x,y,z)=z$$

teremos as duas equações a duas incognitas

$$\varphi(y,z,fy)=fy; \text{ e } \Phi(y,z,fy)=z$$

das quaes deduziremos os valores de y, e z, pela regra demonstrada em o citado §. 55. Seja pois $y=b'$; e $z=c'$; será

$$x=a+b'\overline{f'(a,c)}^{-1}+\frac{b'^2}{1.2|1}\overline{f'(a,c)}^{-1}\frac{d}{a}\overline{f'(a,c)}^{-1}+\frac{b'^3}{1.3|1}\overline{f'(a,c)}^{-1}\frac{d}{a}\left(\overline{f'(a,c)}^{-1}\frac{d}{a}\overline{f'(a,c)}^{-1}\right)+\&c.$$

Pelo mesmo estilo se podem assignar formulas semelhantes, que reprezentem os valores de y, e z; o que por brevidade deixo de fazer, e que he evidentemente inutil na prática da rezolução das equações da fórma das do actual problema; por quanto os valores das outras duas incognitas y, e z são b', e c', isto he, os que se acham pela rezolução das duas equações ultimamente indicadas entre estas mesmas incognitas.

COROLARIO.

Da expressão de x, se segue que he

$$Fx = Fa + bF'a\,f^{-1}(a,c) + \frac{b^2}{1.2|1}F'a\,f^{-1}(a,c)\frac{d}{a}f^{-1}(a,c) + \frac{b^3}{1.3|1}F'a\,f^{-1}(a,c)\frac{d}{a}\left(f^{-1}(a,c)\frac{d}{a}f^{-1}(a,c)\right) + \&c.$$

$$+\frac{b^2}{1.2|1}F''a f^{-2}(a,c) \qquad +3\frac{b^3}{1.3|1}F''a\,f^{-2}(a,c)\frac{d}{a}f^{-2}(a,c) \cdots\cdots + \&c.$$

$$+\frac{b^3}{1.3|1}F'''a\,f^{-3}(a,c) \cdots\cdots + \&c.$$

$$+ \&c.$$

§. 60.º

PROBLEMA. XXVIII.

Dadas as equações $\varphi(x,y,z) = fx$; $\Phi(x,y,z) = fy$; $\Gamma(x,y,z) = Fz$, determinar os valores de x, y, e z.

SOLUÇÃO.

Segundo a mesma lei mencionada no §. antecedente he

$$fx = \varphi(a,b,c) + fy\,\frac{1}{\Phi'(a,b,c)}\frac{d}{a}\varphi(a,b,c) + \frac{f^2y}{1.2|1}\,\frac{1}{\Phi'(a,b,c)}\frac{d}{a}\left(\frac{1}{\Phi'(a,b,c)}\frac{d}{a}\varphi(a,b,c)\right) + \&c.$$

reprezentando a, b, e c os valores correspondentes de x, y, z, que satisfazem a equação $\Phi(x,y,z) = 0$. Mas como no problema actual $\Phi(x,y,z) = 0$. faz $fy = 0$, será b huma das raizes da equação $fy = 0$; e por consequencia a e c serão os valores de x, e z que satisfação á equação $\Phi(x,b,z) = 0$. Ora estes valores de x, y, e z fazem

$$\varphi(a,b,c) = fa\,;\ e\ \Phi'(a,b,c) = f'b$$

e por consequencia servindo-nos d'estas expressões por brevidade da formula teremos

$$fx = fa + fy\,\frac{1}{f'b}\frac{d}{a}fa + \frac{f^2y}{1.2|1}\,\frac{1}{f'b}\frac{d}{a}\left(\frac{1}{f'b}\frac{d}{a}fa\right) + \frac{f^3y}{1.3|1}\,\frac{1}{f'b}\frac{d}{a}\left(\frac{1}{f'b}\frac{d}{a}\left(\frac{1}{f'b}\frac{d}{a}fa\right)\right) + \&c.$$

expressão da qual, reprezentando $\frac{d}{a}fa$ por $f'a$, se conclue

$$Fx = Fa + fy\,F'a\left(\frac{f'a}{f'b}\right) + \frac{f^2y}{1.2|1}F'a\,\frac{1}{f'b}\frac{d}{a}\left(\frac{f'a}{f'b}\right) + \frac{f^3y}{1.3|1}F'a\,\frac{1}{f'b}\frac{d}{a}\left(\frac{1}{f'b}\frac{d}{a}\left(\frac{f'a}{f'b}\right)\right) + \&c.$$

$$+\frac{f^2y}{1^2|1}F''a\left(\frac{f'a}{f'b}\right)^2 \quad +\frac{3}{2}\frac{f^3y}{1^2|1}F''a\frac{1}{f'b}\frac{d}{a}\left(\frac{f'a}{f'b}\right)^2 \cdots + \&c.$$

$$+\frac{f^3y}{1^3|1}F'''a\left(\frac{f'a}{f'b}\right)^3 \cdots\cdots + \&c.$$

$$+ \&c.$$

e finalmente

$$x = a + fy\,\frac{f'a}{f'b} + \frac{2y}{1^2|1}\frac{1}{f'b}\frac{d}{a}\left(\frac{f'a}{f'b}\right) + \frac{f^3y}{1^3|1}\frac{1}{f'b}\frac{d}{a}\left(\frac{1}{f'b}\frac{d}{a}\left(\frac{f'a}{f'b}\right)\right) + \&c.$$

Se designando esta Serie por βy substituirmos βy em logar de x na segunda e terceira das quações do problema, teremos duas novas equações a duas incognitas

$$\Phi(y, z, \beta y) = fy\,;\ \text{e}\ \Gamma(y, z, \beta y) = Fz$$

das quaes deduziremos pelo methodo exposto no §. 55 os valores correspondentes de y, e z. Seja b' o valor de y, será

$$x = a + f b'\,\frac{f'a}{f'b} + \frac{f^2b'}{1^2|1}\frac{1}{f'b}\frac{d}{a}\left(\frac{f'a}{f'b}\right) + \frac{f^3b'}{1^3|1}\frac{1}{f'b}\frac{d}{a}\left(\frac{1}{f'b}\frac{d}{a}\left(\frac{f'a}{f'b}\right)\right) + \&c.$$

Do mesmo modo se determinam as formulas reprezentativas dos valores de y, e z.

Corolario.

A substituição de b' em logar de y dá tambem

$$Fx = Fa + fb'F'a\left(\frac{f'a}{f'b}\right) + \frac{f^2b'}{1^2|1}F'a\frac{1}{f'b}\frac{d}{a}\left(\frac{f'a}{f'b}\right) + \frac{f^3b'}{1^3|1}F'a\frac{1}{f'b}\frac{d}{a}\left(\frac{1}{f'b}\frac{d}{a}\left(\frac{f'a}{f'b}\right)\right) + \&c.$$

$$+\frac{f^2b'}{1^2|1}F''a\left(\frac{f'a}{f'b}\right)^2 \cdots + \frac{1}{2}\frac{f^3b'}{1^3|1}F''a\frac{1}{f'b}\frac{d}{a}\left(\frac{f'a}{f'b}\right)^2 \cdots\cdots + \&c.$$

$$+\frac{f^3b'}{1^3|1}F'''a\left(\frac{f'a}{f'b}\right)^3 \cdots\cdots + \&c.$$

$$+ \&c.$$

§. 61.º

PROBLEMA XXIX.

Dadas as equações $\varphi(x, y, z) = 0$; $\mathfrak{q}(x, y, z) = 0$, e $\Gamma(x, y, z) = 0$, determinar os valores de x, y, e z.

SOLUÇÃO.

No §. 14 vimos que he sempre

$$\varphi(x, y, z) = \varphi x + f(x, y, z)$$

reprezentando por $f(x, y, z)$ todos os termos do desenvolvimento de $\varphi(x, y, z)$ além do primeiro. Nós podemos por tanto reprezentar as equações dadas por

$$f(x, y, z) = -\varphi x; \quad f(x, y, z) = -\Phi y; \text{ e } \quad \beta(x, y, z) = -\Gamma z$$

o que nos mostra que a solução do problema actual se reduz á do antecedente; e que por tanto será

$$x = a - \Phi b' \frac{\varphi' a}{\Phi' b} + \frac{\Phi^2 b'}{1^2|^1} \frac{1}{\Phi' b} \frac{d}{a} \left(\frac{\Phi' a}{\Phi' b}\right) - \frac{\Phi^3 b'}{1^3|^1} \frac{1}{\Phi' b} \frac{d}{a} \left(\frac{1}{\Phi' b} \frac{d}{a} \left(\frac{\varphi' a}{\Phi' b}\right)\right) + \&c.$$

sendo b, o valor que rezulta para y deduzido da equação $\Phi y = 0$; a, e c os correspondentes valores de x, e z deduzidos das equações $\varphi(x, b, z) = 0$, e $\Gamma(x, b, z) = 0$, os quaes se acham pelo modo exposto no §. 58; e b' o valor de y, que se deduz das equações $\varphi(x, z, \mathrm{F}y) = 0$; e $\Gamma(y, z, \mathrm{F}y) = 0$; reprezentando $\mathrm{F}y$ a serie

$$a - \Phi y \left(\frac{\varphi' a}{\Phi' b}\right) + \frac{\Phi^2 y}{1^2|^1} \frac{1}{\Phi' b} \frac{d}{a} \left(\frac{\Phi' a}{\Phi' b}\right) - \frac{\Phi^3 y}{1^3|^1} \frac{1}{\Phi' b} \frac{d}{a} \left(\frac{1}{\Phi' b} \frac{d}{a} \left(\frac{\Phi' a}{\Phi' b}\right)\right) + \&c.$$

§. 62.º

Pelos principios até aqui expostos se póde levar esta parte da Algorithmia transcendente tão longe quanto o exigir o estado das Sciencias, a que as Mathematicas puras podem ser aplicadas. Talvez, que o que deixo rapidamente exposto, seja mais que sufficiente não só relativamente ao seu actual estado, mas aos seus mais proximos, e mais provaveis progressos. O desenvolvimento completo das doutrinas, que tenho tocado, daria materia a grossos volumes. Eu aqui suspendo por ora o meu trabalho, contentando-me com ter mostrado como a Theoria do desenvolvimento das funções em Series constitue rigorosamente falando o Methodo inverso dos Limites: que ella he intimamente connexa, ou intrinsecamente dependente de outro ramo do mesmo Methodo, qual he o Cálculo das Fluxões: que todas as theorias de Derivações, até agora conhecidas são meras transformações, ou disfarces do referido Cálculo: e finalmente que assim o methodo da reversão das Series, como o da sua sub tituição; e

mesmo o da rezolução geral das equações de todos os gráos, qualquer que seja o numero das suas incognitas, se acham comprehendidos na Theoria Geral do desenvolvimento das Funções. Este ramo da Algorithmia Geral parece-me ter sido levado neste pequeno Tratado mais longe do que jámais fôra por algum Analysta; não só porque em o Cálculo das Derivações de M. Arbogast no Artigo 5.° n.° 326 vejo que tudo quanto respeita aos problemas da Classe dos que deixo rezolvidos desde o §. 55 em diante ainda até ao tempo, em que elle escrevia, era assumpto absolutamente intacto: mas por que da solução d'elles se deriva a rezolução das equações de todos os gráos, qualquer que seja o numero das suas incognitas, e hum novo, e ainda não trilhado caminho para a eliminação geral d'estas. Estes dois ultimos objectos, á cerca dos quaes apenas deixo apontados os methodos que lhes dizem respeito, serão (quando as minhas circunstancias o permitirem) trazidos de novo a exame, e então poderão os Geometras, se algum se me não antecipar neste trabalho, conhecer se estes methodos tem sómente a exactidão theoretica, ou se são, como prezumo, aplicaveis vantajosamente á prática: o que por ora não ouzo pronunciar.

Rio de Janeiro 6 de Junho de 1819.

STOCKLER.

TABELLA

DOS

ERROS - - E EMENDAS.

Pag.	Linh.		
VII	34, e 36	nq	mq
X	17	$F(x+u)$	$F'(x+u)$
XI	23	do Calculo	de calculo
—	penultima	cometerão	cometeram
3	6	suas formas	sua forma
12	21	$xF:_{/}$	$xF.'_{//}$
—	23	Fx	$F\overline{x}.'_{/}$
13	27	compozição	comparação
17	15	$-\frac{1}{5}(n-1)^5$	$+\frac{1}{5}(n-1)^5$
24	18	Gorgone	Gergone
25	9	cauzavão	cauzaram
—	13	Arhimedes	Archimedes
—	17	Theoria	Theorica
28	21	conduzião	conduziram
29	16	substituisse	se substituisse
30	4	E se perguntassem por que razão preferio	E se perguntassem porque razão não preferio
—	30	Fx, u	$Fx\,;\,u$
31	31	considerando	considerado
32	5	igualmente	geralmente
39	3	$1.2(n-5)1$	$1.2+(n-5)1$
44	23	Φ''	$\Phi.''$
48	11	he sujeito	he elle sujeito
—	20	$f.x$	fx
55	24	que propuz	que me propuz
56	9	$\varphi,$	$\varphi_{/}$
58	16	incluzivamente	incluida
59	23	$a\,y$	$a\dot{y}$
61	15, 16, e 17	$\varphi''' \ \varphi^{IV} \ \varphi^{V}$	$\varphi.''' \ \varphi.^{IV} \ \varphi.^{V}$
62	penultima	$1.2\|1$; $1.3\|1$; &c.	$1.^2\|^1$; $1.^3\|^1$ &c.
63	5	$d\varphi'^2)$	$d(\varphi.'^2)$
71	17	$x=0$	$a=0$
—	—	do aspecto	de aspecto
75	20	Fz	Fx
—	23	Fz	Fz.

N.B. A pag. 95, 115 e em diversas outras he tão pouca a diferença de forma entre os *FF* grifos e redondos, que he mister muita atenção para não confundi-los; e entender as formulas; pois que os primeiros denotam funções diferentes das que denotam os segundos.

***

TABELLA

ERROS - - E EMENDAS.

Pag.	Linh.		
81	24	z	t
107	17	$\dot{y}$	$\frac{d}{\dot{y}}$
112	14	$+\frac{f y^3}{1^{3\vert 1}}$	$-\frac{f y^3}{1^{3\vert 1}}$
114	12	$\Phi-1$	$\Phi.^{-1}$
115	17	$\frac{d^2}{\dot{a}}\left(\varphi^m a\right)$	$\frac{d^2}{a}\left(\varphi^m a\right)$
—	penultima	$F'a = a$; $F a = 1$	$F a = a$; $F'a = 1$
120	8 e seguintes	$\Phi_{I}. \Phi_{II}. \Phi_{III}.$	$\Phi_I a\ \Phi_{II} a\ \Phi_{III} a$
136	4	$\frac{b'^{-2}}{1^{2\vert 1}}$	$\frac{b'^{2}}{1^{2\vert 1}}$

COMPOSITOR — *A. J. Guedes.*